2022 普通高等学校招生考试 (天津卷)

一、选择题

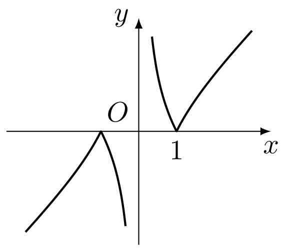
1. 设全集 $U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, 集合 $A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{-1,\ 2\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$ ( )

   (A) $\{0,\ 1\}$ (B) $\{0,\ 1,\ 2\}$ (C) $\{-1,\ 1,\ 2\}$ (D) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

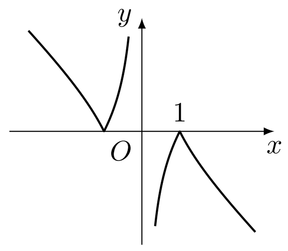
2. "x 为整数"是"$2x+1$ 为整数"的 ( )

   (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件 (D) 即不充分也不必要条件

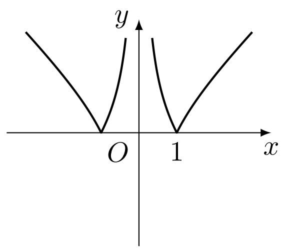
3. 函数 $y=\dfrac{|x^2-1|}{x}$ 的图象大致为 ( )



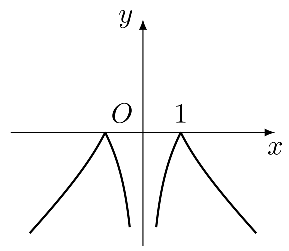
(A)



(B)

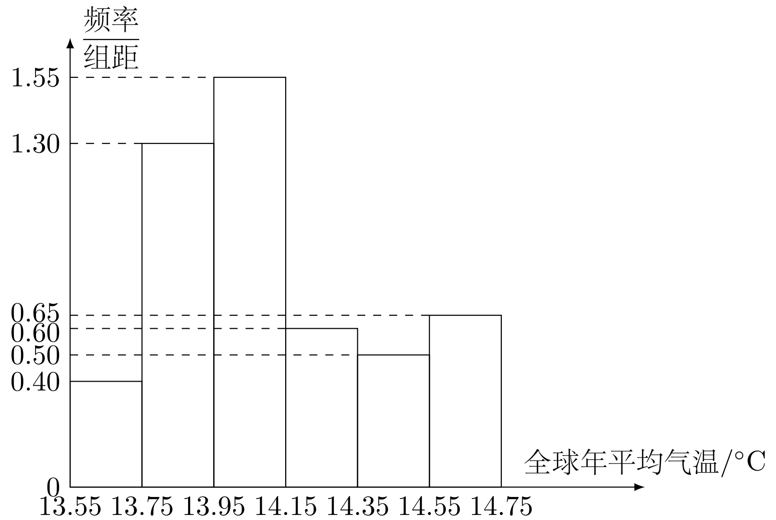


(C)



(D)

4. 将 1916 年到 2015 年的全球年平均气温 (单位: °C), 共 100 个数据, 分成 6 组: $[13.55,13.75)$, $[13.75,13.95)$, $[13.95,14.15)$, $[14.15,14.35)$, $[14.35,14.55)$, $[14.55,14.75]$, 并整理得到如下的频率分布直方图, 则全球年平均气温在区间 $[14.35,14.75]$ 内的有 ( )



   (A) 22 年 (B) 23 年 (C) 25 年 (D) 35 年

5. 设 $a=2^{0.7}$, $b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.7}$, $c=\log_2\dfrac{1}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ( )

   (A) $a<b<c$ (B) $c<a<b$ (C) $b<c<a$ (D) $c<b<a$

6. 化简 $(2\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)=$ ( )

   (A) 1 (B) $\dfrac{5}{4}$ (C) 2 (D) $\dfrac{5}{2}$

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>1)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$ 的准线 l 经过 F_1, 且 l 与双曲线的一条渐近线交于点 A. 若 $\angle F_1F_2A=\dfrac{\pi}{4}$, 则双曲线的方程为 ( )

   (A) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ (D) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

8. 十字歇山顶是中国古代建筑屋顶的经典样式之一, 图 1 中的故宫角楼的顶部即为十字歇山顶. 其上部可视为由两个相同的直三棱柱交叠而成的几何体 (图 2). 这两个直三棱柱有一个公共侧面 $ABCD$. 在底面 BCE 中, 若 $BE=CE=3$, $\angle BEC=120°$, 则该几何体的体积为 ( )


图 1

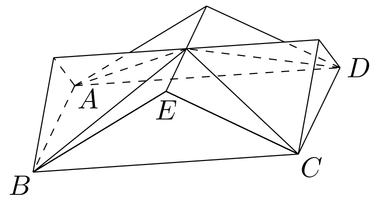


图 2

   (A) $\dfrac{27}{2}$ (B) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ (C) 27 (D) $27\sqrt{3}$

9. 关于函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$, 给出下列结论:
   ① $f(x)$ 的最小正周期是 2π;
   ② $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增;
   ③ 当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]$;
   ④ $f(x)$ 的图象可以由函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度得到.
   其中正确结论的个数为 ( )

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

10. 已知 i 是虚数单位, 化简 $\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的结果为______.

11. 在 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, 常数项是______.

12. 若直线 $x-y+m=0\ (m>0)$ 被圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 截得的弦长等于 m, 则 m 的值为______.

13. 现有 52 张扑克牌 (去掉大小王), 每次取一张, 取后不放回, 则两次都抽到 A 的概率为______; 在第一次抽到 A 的条件下, 第二次也抽到 A 的概率是______.

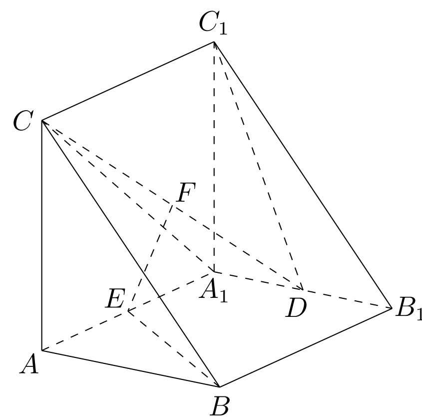
14. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 为 AC 的中点, 点 E 满足 $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$. 记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$, 用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}=$______; 若 $AB\perp DE$, 则 $\angle ACB$ 的最大值为______.

15. 设 $a\in\mathbf{R}$. 对任意实数 x, 用 $f(x)$ 表示 $|x|-2$, $x^2-ax+3a-5$ 中的较小者. 若函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则 a 的取值范围为______.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a=\sqrt{6}$, $b=2c$, $\cos A=-\dfrac{1}{4}$.
    (1) 求 c 的值;
    (2) 求 $\sin B$ 的值;
    (3) 求 $\sin(2A-B)$ 的值.

17. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC\perp AB$, 点 D, E, F 分别为 A_1B_1, AA_1, CD 的中点, $AB=AC=AA_1=2$.
    (1) 求证: $EF\ /\!/$ 平面 ABC;
    (2) 求直线 BE 与平面 CC_1D 所成角的正弦值;
    (3) 求平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值.



18. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 求证: $(S_{n+1}+a_{n+1})\,b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$;

(3) 求 $\sum\limits_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]b_k$.

19. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点 F、右顶点 A 和上顶点 B 满足 $\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 直线 l 与椭圆有唯一公共点 M, 与 y 轴相交于点 N (N 异于 M). 记 O 为原点, 若 $|OM|=|ON|$, 且 $\triangle MON$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求椭圆的方程.

20. 已知 $a, b\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\sin x$, $g(x)=b\sqrt{x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点,

① 当 $a=0$ 时, 求 b 的取值范围;

② 求证: $a^2+b^2>\mathrm{e}$.