2022 普通高等学校招生考试 (新高考 I)

一、单选题

1. 若集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$, $N=\{x\mid 3x\geqslant 1\}$, 则 $M\cap N=$ ( )
   (A) $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$ (B) $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant x<2\right\}$
   (C) $\{x\mid 3\leqslant x<16\}$ (D) $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant x<16\right\}$
2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$, 则 $z+\bar{z}=$ ( )
   (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$, 则 $\overrightarrow{CB}=$ ( )
   (A) $3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$ (B) $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$ (C) $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ (D) $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$
4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时, 相应水面的面积为 140.0 km^2; 水位为海拔 157.5 m 时, 相应水面的面积为 180.0 km^2. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时, 增加的水量约为 ($\sqrt{7}\approx 2.65$) ( )
   (A) $1.0\times10^9\ \mathrm{m}^3$ (B) $1.2\times10^9\ \mathrm{m}^3$ (C) $1.4\times10^9\ \mathrm{m}^3$ (D) $1.6\times10^9\ \mathrm{m}^3$
5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 则这 2 个数互质的概率为 ( )
   (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$
6. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b\ (\omega>0)$ 的最小正周期为 T, 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$, 且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ( )
   (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3
7. 设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}$, $b=\frac{1}{9}$, $c=-\ln 0.9$, 则 ( )
   (A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $a<c<b$
8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l, 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π, 且 $3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$, 则该四棱锥体积的取值范围是 ( )
   (A) $\left[18,\frac{81}{4}\right]$ (B) $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$ (C) $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$ (D) $[18,27]$

二、多选题

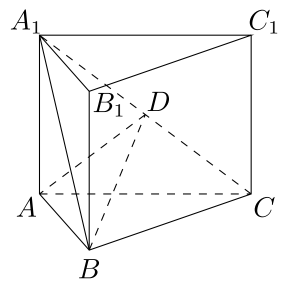
9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 则 ( )
   (A) 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
   (B) 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
   (C) 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
   (D) 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°
10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$, 则 ( )
    (A) $f(x)$ 有两个极值点
    (B) $f(x)$ 有三个零点
    (C) 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心
    (D) 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线
11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1,1)$ 在抛物线 C: $x^2=2py\ (p>0)$ 上, 过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则 ( )
    (A) C 的准线为 $y=-1$ (B) 直线 AB 与 C 相切
    (C) $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$ (D) $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$
12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$, $g(2+x)$ 均为偶函数, 则 ( )
    (A) $f(0)=0$ (B) $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ (C) $f(-1)=f(4)$ (D) $g(-1)=g(2)$

三、填空题

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为______. (用数字作答)
14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程______.
15. 若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是______.
16. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, C 的上顶点为 A, 两个焦点为 F_1, F_2, 离心率为 $\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, $|DE|=6$, 则 $\triangle ADE$ 的周长是______.

四、解答题

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=1$, $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.
    (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
    (2) 证明: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.
18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.
    (1) 若 $C=\frac{2\pi}{3}$, 求 B;
    (2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.
19. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.
    (1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;
    (2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1=AB$, 平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1, 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.



20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯 (卫生习惯分为良好和不够良好两类) 的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例 (称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人 (称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件"选到的人卫生习惯不够良好", B 表示事件"选到的人患有该疾病", $\dfrac{P(B \mid A)}{P(\overline{B} \mid A)}$ 与 $\dfrac{P(B \mid \overline{A})}{P(\overline{B} \mid \overline{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标, 记该指标为 R.

① 证明: $R=\dfrac{P(A \mid B)}{P(\overline{A} \mid B)} \cdot \dfrac{P(\overline{A} \mid \overline{B})}{P(A \mid \overline{B})}$;

② 利用该调查数据, 给出 $P(A \mid B)$, $P(A \mid \overline{B})$ 的估计值, 并利用①的结果给出 R 的估计值.

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P\left(K^2 \geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

.

21. 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$ $(a>1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ=2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a;

(2) 证明: 存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.