2023 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 设 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $|x-2|<1$ 的解集为______.

2. 若向量 $\vec{a}=(-2,3)$, $\vec{b}=(1,2)$, 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公比为 2 的等比数列, 其前 n 项和为 S_n, 则 $S_6=$______.

4. 若 $\tan A=3$, 则 $\tan 2A=$______.

5. 函数 $y=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 的值域为______.

6. 若复数 $z=1+\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $|1-\mathrm{i}z|=$______.

7. 设 $m\in\mathbf{R}$, 若圆 $x^2+y^2-4y-m=0$ 的面积为 π, 则 $m=$______.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对边的边长分别为 a、b、c. 若 $a=4$, $b=5$, $c=6$, 则 $\sin A=$______.

9. 国内生产总值 (GDP) 是衡量该地区经济状况的最佳指标. 根据统计数据显示, 某市在 2020 年间经济高质量增长, GDP 稳定增长, 第一季度和第四季度的 GDP 分别为 232 亿元和 241 亿元, 且四个季度的 GDP 逐季度增长, 若这四个季度的 GDP 的中位数与平均数相等, 则该市 2020 年的 GDP 为______亿元.

10. 已知对任意给定的实数 x, 都有 $(1+2023x)^{100}+(2023-x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}$, 当 $a_k<0$ 时, 其中 $k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100\}$, 正整数 k 的最大值为______.

11. 某公园欲建设一段斜坡, 斜坡面是一平面, 坡面与水平地面所成角为 θ, 坡顶距水平地面的高度为 4 m. 游客从坡底沿着斜坡面向上直行, 每走 1 m 消耗的体力为 $1.025-\cos\theta$, 当 $\theta=$______时, 游客走斜坡所消耗的体力最小.

12. 空间中有三个定点 A、B、C, 且 $AB=BC=CA=1$, 若在空间中任取 2 个不同的点, 使得它们与 A、B、C 恰好成为一个正四棱锥的五个顶点, 则不同的取法共有______种.

二、选择题

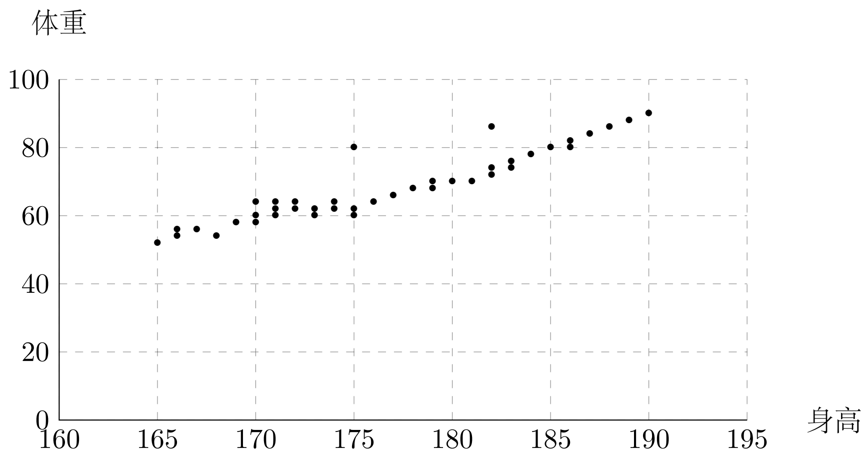
13. 已知集合 $P=\{1,\ 2\}$, $Q=\{2,\ 3\}$, 若 $M=\{x\mid x\in P$ 且 $x\notin Q\}$, 则 $M=$ ( )

(A) $\{1\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{3\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3\}$

14. 为了解某校高中男生身高与体重的关系, 随机选取 50 名男生的身高与体重的数据, 绘制散点图, 如图所示, 下列说法正确的是 ( )

(A) 身高越高, 体重越重 (B) 身高越高, 体重越轻

(C) 身高与体重之间呈正相关 (D) 身高与体重之间呈负相关



15. 已知 $a>0$, 函数 $y=\sin x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最小值为 s, 在区间 $[2a,3a]$ 上的最小值为 t, 当 a 变化时, 下列一定不成立的是 ( )

(A) $s>0$, $t>0$ (B) $s>0$, $t<0$ (C) $s<0$, $t<0$ (D) $s<0$, $t>0$

16. 对于曲线 C, 若存在点 M, 使得对任意的点 $P\in C$, 都存在 $Q\in C$, 且 $|PM|\cdot|QM|=1$, 则称曲线 C 为"自相关曲线". 有以下结论: ① 任何椭圆都是"自相关曲线"; ② 存在双曲线是"自相关曲线". 关于上述两个结论, 说法正确的是 ( )

(A) ①成立, ②成立 (B) ①成立, ②不成立

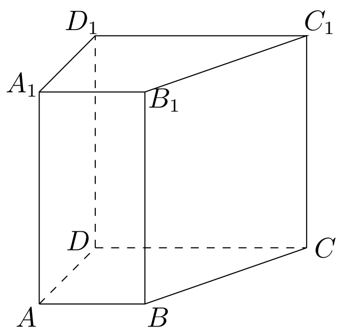
(C) ①不成立, ②成立 (D) ①不成立, ②不成立

三、解答题

17. 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB\parallel DC$, $AB\perp AD$, $AB=2$, $AD=3$, $DC=4$.

(1) 求证: $A_1B\parallel$ 平面 DCC_1D_1;

(2) 若直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 36, 求二面角 A_1-BD-A 的大小.



18. 设 a、$c\in\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+(3a+1)x+c}{x+a}$.

(1) 当 $a=0$ 时, 是否存在实数 c, 使得 $y=f(x)$ 为奇函数, 请说明理由;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(1,3)$, 且其与 x 轴的负半轴有两个不同的交点, 求 c 的值及 a 的取值范围.

19. 2023 年 6 月 7 日, 21 世纪汽车博览会在上海举行. 已知某汽车模型公司共有 25 个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
米色内饰	12	8
棕色内饰	2	3

(1) 小明从这些汽车模型中随机取出一个, 记事件 A 为取到红色外观的汽车模型, 事件 B 为取到棕色内饰的汽车模型, 求 $P(B)$ 和 $P(B \mid A)$, 并据此判断事件 A 和 B 是否独立;
(2) 该公司举行抽奖活动, 规定在一次抽奖中, 每人可以从这些汽车模型中随机取出两个汽车模型, 并给出以下假设:
假设 1: 取出的两个汽车模型会出现三种结果, 即外观和内饰均为同色、外观和内饰均不为同色及仅外观或仅内饰为同色;
假设 2: 按出现结果的可能性大小, 概率越小奖项越高;
假设 3: 抽奖活动的奖金额为: 一等奖 600 元、二等奖 300 元、三等奖 150 元.
请你分析各奖项对应的结果, 设 X 为奖金额, 写出 X 的分布并求其数学期望.

20. 已知抛物线 Γ: $y^2=4x$, A 为第一象限内 Γ 上的一点, 设点 A 的纵坐标为 a.
(1) 若点 A 到 Γ 的准线的距离为 3, 求 a 的值;
(2) 若 $a=4$, B 为 x 轴上的一点, 且线段 AB 的中点在 Γ 上, 求点 B 的坐标及原点 O 到直线 AB 的距离;
(3) 直线 l: $x=-3$, P 是第一象限内 Γ 上异于点 A 的动点, 直线 AP 与 l 交于点 Q, 点 H 为点 P 在 l 上的投影, 若点 A 满足: $|HQ|>4$ 对任意的点 P 成立, 求 a 的取值范围.

21. 已知 $f(x)=\ln x$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a_1, f(a_1))$ 处的切线交 y 轴于点 $(0, a_2)$, 且 $a_2>0$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a_2, f(a_2))$ 处的切线交 y 轴于点 $(0, a_3)$, 以此类推, 直至 $a_m \leqslant 0$ 时, 则停止操作, 得到数列 $\{a_n\}$, 其中 m、n 为正整数, $1<n \leqslant m$.
(1) 证明: 当 $n \geqslant 2$ 时, $a_n=\ln a_{n-1}-1$;
(2) 当 $n \geqslant 2$ 时, 试比较 a_n 和 $a_{n-1}-2$ 的大小, 请说明理由;
(3) 是否存在不小于 3 的正整数 k, 使得 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ 成等差数列? 若存在, 求出 k 的所有取值; 若不存在, 请说明理由.