2023 普通高等学校招生考试 (全国乙卷理)

一、单选题

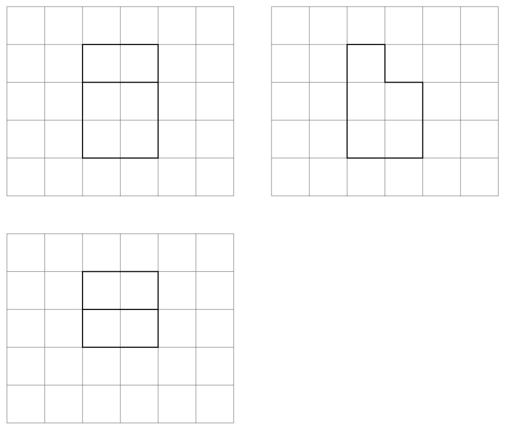
1. 设 $z=\dfrac{2+i}{1+i^2+i^5}$, 则 $\overline{z}=$ ( )

(A) $1-2i$　(B) $1+2i$　(C) $2-i$　(D) $2+i$

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x\mid x<1\}$, $N=\{x\mid -1<x<2\}$, 则 $\{x\mid x\geqslant 2\}=$ ( )

(A) $\complement_U(M\cup N)$　(B) $N\cup\complement_U M$　(C) $\complement_U(M\cap N)$　(D) $M\cup\complement_U N$

3. 如图, 网格纸上绘制的是一个零件的三视图, 网格小正方形的边长为 1, 则该零件的表面积为 ( )



(A) 24　(B) 26　(C) 28　(D) 30

4. 已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数, 则 $a=$ ( )

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

5. 设 O 为平面直角坐标系的坐标原点, 在区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 内随机取一点, 记该点为 A, 则直线 OA 的倾斜角不大于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{1}{6}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增, 直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的两条对称轴, 则 $f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=$ ( )

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 甲、乙两位同学从 6 种课外读物中各自选读 2 种, 则这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有 ( )

(A) 30 种　(B) 60 种　(C) 120 种　(D) 240 种

8. 已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$, O 为底面圆心, PA, PB 为圆锥的母线, $\angle AOB=120^\circ$, 若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$, 则该圆锥的体积为 ( )

(A) π　(B) $\sqrt{6}\pi$　(C) 3π　(D) $3\sqrt{6}\pi$

9. 已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, AB 为斜边, $\triangle ABD$ 为等边三角形. 若二面角 $C-AB-D$ 为 150°, 则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　(D) $\dfrac{2}{5}$

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\dfrac{2\pi}{3}$, 集合 $S=\{\cos a_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}$. 若 $S=\{a,\ b\}$, 则 $ab=$ ( )

(A) -1　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 0　(D) $\dfrac{1}{2}$

11. 设 A, B 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上两点, 下列四个点中, 可以为线段 AB 中点的是 ( )

(A) $(1,1)$　(B) $(-1,2)$　(C) $(1,3)$　(D) $(-1,-4)$

12. 已知 $\odot O$ 的半径为 1, 直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A, 直线 PB 与 $\odot O$ 交于 B, C 两点, D 为 BC 的中点. 若 $|PO|=\sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为( )

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$　(C) $1+\sqrt{2}$　(D) $2+\sqrt{2}$

二、填空题

13. 已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 C: $y^2=2px$ 上, 则 A 到 C 的准线的距离为______.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y\leqslant -1,\\ x+2y\leqslant 9,\\ 3x+y\geqslant 7,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为______.

15. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_2a_4a_5=a_3a_6$, $a_9a_{10}=-8$, 则 $a_7=$______.

16. 设 $a\in(0,1)$, 若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是______.

三、解答题

17. 某厂为比较甲、乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应, 进行 10 次配对试验, 每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品, 随机地选其中一个用甲工艺处理, 另一个用乙工艺处理, 测量处理后的橡胶产品的伸缩率. 甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为 x_i, y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$. 试验结果如下:

试验序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
伸缩率 x_i	545	533	551	522	575	544	541	568	596	548
伸缩率 y_i	536	527	543	530	560	533	522	550	576	536

记 $z_i=x_i-y_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$, 记 z_1, z_2, $\cdots$, z_{10} 的样本平均数为 $\overline{z}$, 样本方差为 s^2.

(1) 求 $\overline{z}$, s^2;

(2) 判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高 (如果 $\overline{z}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{s^2}{10}}$, 则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle BAC=120^\circ$, $AB=2$, $AC=1$.

(1) 求 $\sin\angle ABC$;

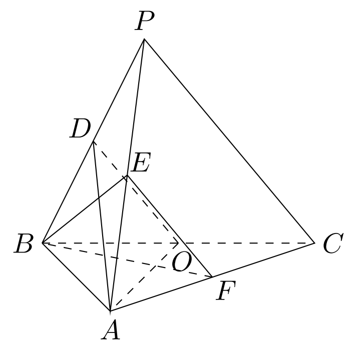
(2) 若 D 为 BC 上一点, 且 $\angle BAD=90^\circ$, 求 $\triangle ADC$ 的面积.

19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB\perp BC$, $AB=2$, $BC=2\sqrt{2}$, $PB=PC=\sqrt{6}$, BP, AP, BC 的中点分别为 D, E, O, $AD=\sqrt{5}DO$, 点 F 在 AC 上, $BF\perp AO$.

(1) 证明: EF // 平面 ADO;

(2) 证明: 平面 $ADO\perp$ 平面 BEF;

(3) 求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.



20. 已知椭圆 C: $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, 点 $A(-2,0)$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(-2,3)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 与 y 轴的交点分别为 M, N, 证明: 线段 MN 的中点为定点.

21. 已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$.

(1) 当 $a=-1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 是否存在 a, b, 使得曲线 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称? 若存在, 求 a, b; 若不存在, 说明理由;

(3) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值点, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\ \left(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$. 曲线 C_2: $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha,\end{cases}$ (α 为参数, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$).

(1) 写出 C_1 的直角坐标方程;

(2) 若直线 $y=x+m$ 既与 C_1 没有公共点, 也与 C_2 没有公共点, 求 m 的取值范围.

23. 已知 $f(x)=2|x|+|x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集;

(2) 在直角坐标系 xOy 中, 求不等式组 $\begin{cases}f(x)\leqslant y,\\ x+y-6\leqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域的面积.