2023 普通高等学校招生考试 (北京卷)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x \mid x+2 \geqslant 0\}$, $N=\{x \mid x-1<0\}$, 则 $M \cap N=$ ( )

(A) $\{x \mid -2 \leqslant x<1\}$ (B) $\{x \mid -2<x \leqslant 1\}$

(C) $\{x \mid x \geqslant -2\}$ (D) $\{x \mid x<1\}$

2. 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标是 $(-1, \sqrt{3})$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$( )

(A) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ (B) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ (C) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ (D) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,3)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,1)$, 则 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=$ ( )

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

4. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 ( )

(A) $f(x)=-\ln x$ (B) $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$ (C) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ (D) $f(x)=3^{|x-1|}$

5. 在 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, x 的系数为 ( )

(A) -40 (B) 40 (C) -80 (D) 80

6. 已知抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点为 F, 点 M 在 C 上. 若 M 到直线 $x=-3$ 的距离为 5, 则 $|MF|=$ ( )

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$, 则 $\angle C=$ ( )

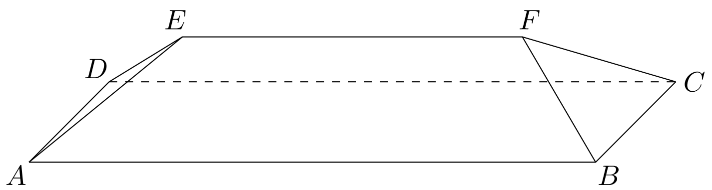
(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

8. 若 $xy \neq 0$, 则“$x+y=0$”是“$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-2$”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一, 蕴含着丰富的数学元素. 安装灯带可以勾勒出建筑轮廓, 展现造型之美. 如图, 某坡屋顶可视为一个五面体, 其中两个面是全等的等腰梯形, 两个面是全等的等腰三角形. 若 $AB=25$ m, $BC=10$ m, 且等腰梯形所在平面、等腰三角形所在平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\dfrac{\sqrt{14}}{5}$, 则该五面体的所有棱长之和为 ( )



(A) 102 m (B) 112 m (C) 117 m (D) 125 m

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n-6)^3+6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 则 ( )

(A) 当 $a_1=3$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列, 且存在常数 $M \leqslant 0$, 使得 $a_n>M$ 恒成立

(B) 当 $a_1=5$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 且存在常数 $M \leqslant 6$, 使得 $a_n<M$ 恒成立

(C) 当 $a_1=7$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列, 且存在常数 $M>6$, 使得 $a_n>M$ 恒成立

(D) 当 $a_1=9$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 且存在常数 $M>0$, 使得 $a_n<M$ 恒成立

二、填空题

11. 已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$, 则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$______.

12. 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$, 离心率为 $\sqrt{2}$, 则 C 的方程为______.

13. 已知命题 p: 若 α, β 为第一象限角, 且 $\alpha>\beta$, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$. 能说明 p 为假命题的一组 α, β 的值为 $\alpha=$______, $\beta=$______.

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史, 战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”. 已知 9 枚环权的质量 (单位: 铢) 从小到大构成项数为 9 的数列 $\{a_n\}$, 该数列的前 3 项成等差数列, 后 7 项成等比数列, 且 $a_1=1$, $a_5=12$, $a_9=192$, 则 $a_7=$______; 数列 $\{a_n\}$ 所有项的和为______.

15. 设 $a>0$, 函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-a, \\ \sqrt{a^2-x^2}, & -a \leqslant x \leqslant a, \\ -\sqrt{x}-1, & x>a. \end{cases}$ 给出下列四个结论:

① $f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减;

② 当 $a \geqslant 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值;

③ 设 $M(x_1, f(x_1))$ $(x_1 \leqslant a)$, $N(x_2, f(x_2))$ $(x_2>a)$, 则 $|MN|>1$;

④ 设 $P(x_3, f(x_3))$ $(x_3<-a)$, $Q(x_4, f(x_4))$ $(x_4 \geqslant -a)$. 若 $|PQ|$ 存在最小值, 则 a 的取值范围是 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.

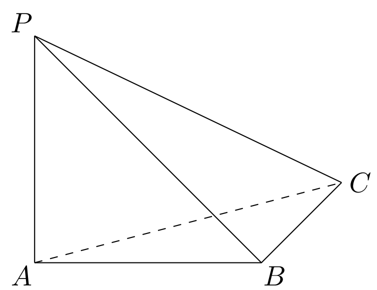
其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC, $PA=AB=BC=1$, $PC=\sqrt{3}$.

(1) 求证: $BC \perp$ 平面 PAB;

(2) 求二面角 $A-PC-B$ 的大小.



17. 设函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 若 $f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求 φ 的值;

(2) 已知 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使函数 $f(x)$ 存在, 求 ω, φ 的值.

条件①: $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$;

条件②: $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$;

条件③: $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

18. 为研究某种农产品价格变化的规律, 收集得到了该农产品连续 40 天的价格变化数据, 如下表所示. 在描述价格变化时, 用“+”表示“上涨”, 即当天价格比前一天价格高; 用“−”表示“下跌”, 即当天价格比前一天价格低; 用“0”表示“不变”, 即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化
第 1 天到第 20 天	− + + 0 − − − + + 0 + 0 − − + − + 0 0 +
第 21 天到第 40 天	0 + + 0 − − − + + 0 + 0 + − − − + 0 − +

用频率估计概率.

(1) 试估计该农产品价格“上涨”的概率;

(2) 假设该农产品每天的价格变化是相互独立的. 在未来的日子里任取 4 天, 试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率;

(3) 假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格变化的影响. 判断第 41 天该农产品价格“上涨”、“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大. (结论不要求证明)

19. 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, A, C 分别是 E 的上、下顶点, B, D 分别是 E 的左、右顶点, $|AC|=4$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设 P 为第一象限内 E 上的动点, 直线 PD 与直线 BC 交于点 M, 直线 PA 与直线 $y=-2$ 交于点 N. 求证: $MN\parallel CD$.

20. 设函数 $f(x)=x-x^3\mathrm{e}^{ax+b}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 设函数 $g(x)=f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;

(3) 求 $f(x)$ 的极值点个数.

21. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的项数均为 $m\ (m>2)$, 且 $a_n, b_n\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n, 并规定 $A_0=B_0=0$. 对于 $k\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$, 定义 $r_k=\max\{i\mid B_i\leqslant A_k,\ i\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\}\}$, 其中, $\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

(1) 若 $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=3$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=3$, 写出 r_0, r_1, r_2, r_3 的值;

(2) 若 $a_1\geqslant b_1$, 且 $2r_j\leqslant r_{j+1}+r_{j-1}$, $j=1,2,\cdots,m-1$, 求 r_n;

(3) 证明: 存在 p, q, s, $t\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$, 满足 $p>q$, $s>t$, 使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.