2023 普通高等学校招生考试 (天津卷)

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$, 则 $(\complement_U B)\cup A=$ ( )

(A) $\{1,\ 3,\ 5\}$ (B) $\{1,\ 3\}$ (C) $\{1,\ 2,\ 4\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$

2. 已知 $a, b\in\mathbf{R}$, 则"$a^2=b^2$"是"$a^2+b^2=2ab$"的 ( )

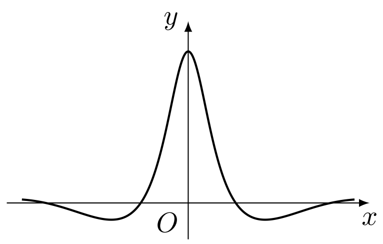
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 设 $a=1.01^{0.5}$, $b=1.01^{0.6}$, $c=0.6^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $b<a<c$ (C) $c<b<a$ (D) $c<a<b$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的部分图象如下, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ( )



(A) $f(x)=\dfrac{5\mathrm{e}^x-5\mathrm{e}^{-x}}{x^2+2}$ (B) $f(x)=\dfrac{5\sin x}{x^2+1}$

(C) $f(x)=\dfrac{5\mathrm{e}^x+5\mathrm{e}^{-x}}{x^2+2}$ (D) $f(x)=\dfrac{5\cos x}{x^2+1}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=2$, $a_{n+1}=2S_n+2\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $a_4=$ ( )

(A) 16 (B) 32 (C) 54 (D) 162

6. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 且 $f(x)$ 的一个周期为 4, 则 $f(x)$ 的解析式可以是 ( )

(A) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ (B) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

(C) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$ (D) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$

7. 鸢是鹰科的一种鸟,《诗经 · 大雅 · 旱麓》曰"鸢飞戾天, 鱼跃于渊". 鸢尾花因花瓣形如鸢尾而得名 (图 1), 寓意鹏程万里、前途无量. 通过随机抽样, 收集了若干朵某品种鸢尾花的花萼长度和花瓣长度 (单位: cm), 绘制对应散点图 (图 2) 如下, 计算得样本相关系数为 0.8642, 利用最小二乘法求得相应的经验回归方程为 $\hat{y}=0.7501x+0.6105$. 根据以上信息, 如下判断正确的为 ( )

图 1

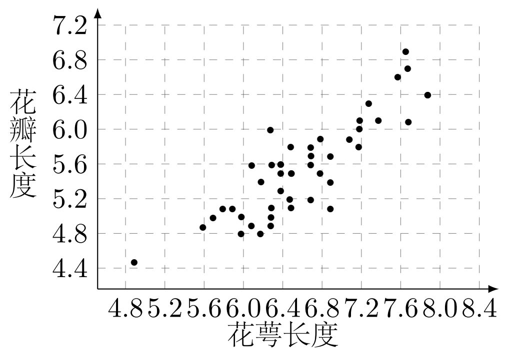


图 2

(A) 花萼长度与花瓣长度不存在相关关系

(B) 花萼长度与花瓣长度负相关

(C) 花萼长度为 7 cm 的该品种鸢尾花的花瓣长度的平均值约为 5.8612 cm

(D) 若选取其他品种鸢尾花进行抽样, 所得花萼长度与花瓣长度的样本相关系数一定为 0.8642

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 点 M, N 分别在棱 PB 和 PC 上, 且 $PM=\dfrac{1}{3}PB$, $PN=\dfrac{2}{3}PC$, 则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为( )

(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{2}{9}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{4}{9}$

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2. 过 F_2 向一条渐近线作垂线, 垂足为 P. 若 $|PF_2|=2$, 直线 PF_1 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题

10. 已知 i 是虚数单位, 化简 $\dfrac{5+14\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ 的结果为______.

11. 在 $\left(2x^3-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为______.

12. 已知过原点 O 的直线 l 与圆 $(x+2)^2+y^2=3$ 相切, 且 l 与抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 交于 O, A 两点. 若 $|OA|=8$, 则 $p=$______.

13. 把若干个黑球和白球 (这些球除颜色外没有其他差异) 放进三个空箱子中. 三个箱子中的球数之比为 $5:4:6$, 且其中的黑球比例依次为 40%, 25%, 50%. 若从每个箱子中各随机摸出一球, 则三个球都是黑球的概率为______; 若把所有球放在一起, 然后随机摸出一球, 则该球是白球的概率为______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=1$, $\angle A=60^\circ$, $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. 记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}=$______; 若 $\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最大值为______.

15. 设 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=ax^2-2x-|x^2-ax+1|$. 若 $f(x)$ 恰有两个零点, 则 a 的取值范围为______.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a=\sqrt{39}$, $b=2$, $A=120^\circ$.

(1) 求 $\sin B$ 的值;

(2) 求 c 的值;

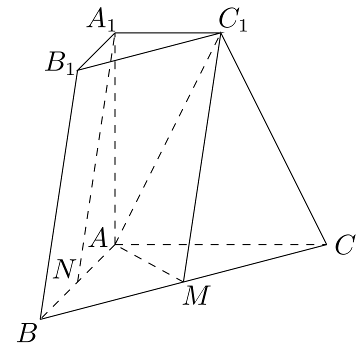
(3) 求 $\sin(B-C)$ 的值.

17. 如图, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1\perp$ 平面 ABC, $AB\perp AC$, $AB=AC=AA_1=2$, $A_1C_1=1$, M 为 BC 的中点, N 为 AB 的中点.

(1) 求证: $A_1N\ /\!/$ 平面 AMC_1;

(2) 求平面 AMC_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值;

(3) 求点 C 到平面 AMC_1 的距离.



18. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1 和 A_2, 右焦点为 F, 且 $|A_1F|=3$, $|A_2F|=1$.

(1) 求椭圆的方程和离心率;

(2) 点 P 在椭圆上 (P 异于椭圆的顶点), 直线 A_2P 交 y 轴于点 Q. 若 $\triangle A_1PQ$ 面积为 $\triangle A_2PF$ 面积的 2 倍, 求直线 A_2P 的方程.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2+a_5=16$, $a_5-a_3=4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及 $\sum\limits_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(2) 设 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$, 当 $2^{k-1}\leqslant n\leqslant 2^k-1$ 时, $b_k<a_n<b_{k+1}$.

① 当 $k\geqslant 2$ 时, 求证: $2^k-1<b_k<2^k+1$;

② 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及前 n 项和.

20. 已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)\ln(x+1)$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线斜率;

(2) 求证: 当 $x>0$ 时, $f(x)>1$;

(3) 求证: $\dfrac{5}{6}<\ln(n!)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n+n\leqslant 1\ (n\in\mathbf{N}^*)$.