2023 普通高等学校招生考试 (新高考 I)

一、单选题

1. 已知集合 $M=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ (B) $\{0,\ 1,\ 2\}$

(C) $\{-2\}$ (D) $\{2\}$

2. 已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$, 则 $z-\overline{z}=$ ( )

(A) $-\mathrm{i}$ (B) i (C) 0 (D) 1

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$. 若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$, 则 ( )

(A) $\lambda+\mu=1$ (B) $\lambda+\mu=-1$ (C) $\lambda\mu=1$ (D) $\lambda\mu=-1$

4. 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-2]$ (B) $[-2,0)$ (C) $(0,2]$ (D) $[2,+\infty)$

5. 设椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$, C_2: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1, e_2. 若 $e_2=\sqrt{3}e_1$, 则 $a=$ ( )

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{6}$

6. 过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α, 则 $\sin\alpha=$ ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 ( )

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$, $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$ ( )

(A) $\dfrac{7}{9}$ (B) $\dfrac{1}{9}$ (C) $-\dfrac{1}{9}$ (D) $-\dfrac{7}{9}$

二、多选题

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_6$, 其中 x_1 是最小值, x_6 是最大值, 则 ( )

(A) x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的平均数

(B) x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的中位数

(C) x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的标准差

(D) x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的极差

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_P=20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$, 其中常数 $p_0\ (p_0>0)$ 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	60 ~ 90
混合动力汽车	10	50 ~ 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车, 混合动力汽车, 电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3, 则 ( )

(A) $p_1\geqslant p_2$ (B) $p_2>10p_3$ (C) $p_3=100p_0$ (D) $p_1\leqslant 100p_2$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$, 则 ( )

(A) $f(0)=0$ (B) $f(1)=0$

(C) $f(x)$ 是偶函数 (D) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12. 下列物体中, 能被整体放入棱长为 1 (单位: m) 的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计) 内的有 ( )

(A) 直径为 0.99 m 的球体

(B) 所有棱长均为 1.4 m 的四面体

(C) 底面直径为 0.01 m, 高为 1.8 m 的圆柱体

(D) 底面直径为 1.2 m, 高为 0.01 m 的圆柱体

三、填空题

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课, 学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课, 并且每类选修课至少选修 1 门, 则不同的选课方案共有______种. (用数字作答)

14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $A_1B_1=1$, $AA_1=\sqrt{2}$, 则该棱台的体积为______.

15. 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1\ (\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$, 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是______.

16. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2. 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为______.

四、解答题

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=3C$, $2\sin(A-C)=\sin B$.

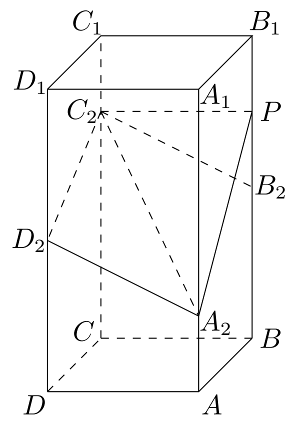
(1) 求 $\sin A$;

(2) 设 $AB=5$, 求 AB 边上的高.

18. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $AA_1=4$. 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2=1$, $BB_2=DD_2=2$, $CC_2=3$.

(1) 证明: $B_2C_2 \mathbin{/\mkern-5mu/} A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P.



19. 已知函数 $f(x)=a(\mathrm{e}^x+a)-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a>0$ 时, 求证: $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 且 $d>1$. 令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和.
(1) 若 $3a_2=3a_1+a_3$, $S_3+T_3=21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99}-T_{99}=99$, 求 d.

21. 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签决定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.
(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;
(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;
(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i$. 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y, 求 $E(Y)$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W.
(1) 求 W 的方程;
(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.