2024 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 若集合 $A=\{2,\ 4\}$, 则 $\overline{A}=$______.

2. 已知函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(3)=$______.

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集为______.

4. 设 a 为常数, 若函数 $y=x^3+a$ 是奇函数, 则 $a=$______.

5. 设 $k\in\mathbf{R}$, 向量 $\vec{a}=(2,5)$, $\vec{b}=(6,k)$, 若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$, 则 $k=$______.

6. 在 $(x+1)^n$ 的二项展开式中, 若各项系数和为 32, 则 x^2 项的系数为______.

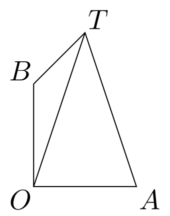
7. 若抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到其准线的距离为 9, 则点 P 到 x 轴的距离为______.

8. 小王参加知识竞赛, 题库中 A 组题有 5000 道, B 组题有 4000 道, C 组题有 3000 道, 若小王做对这三组题的概率依次为 0.92、0.86、0.72, 则随机从题库中抽取一道题, 小王做对的概率是______.

9. 设 $m\in\mathbf{R}$, 若虚数 z 的实部为 1, 且满足 $z+\dfrac{2}{z}=m$, 则 $m=$______.

10. 已知某集合中的元素是不重复的数字组成的三位正整数, 若该集合中任意两个数的积均为偶数, 则该集合的元素个数的最大值为______.

11. 海上有灯塔 O、A、B 和船只 T, A 在 O 的正东方向, B 在 O 的正北方向, A、B 到 O 的距离相等, O、A、T、B 按逆时针排列. 若 $\angle ATO=37^\circ$, $\angle BTO=16.5^\circ$, 则 $\angle BOT=$______. (结果精确到 0.1 度)



12. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足首项 $a_1>0$, 公比 $q>1$, $I_n=\{x-y|\ x,\ y\in[a_1,a_2]\cup[a_n,a_{n+1}]\}$, 若对任意正整数 n, I_n 都是闭区间, 则 q 的取值范围是______.

二、选择题

13. 若气温 (单位 °C) 和海水表层温度 (单位: 摄氏度) 的相关系数为正数, 则下列关于两者关系的说法正确的是 ( )

(A) 随着气温由低变高, 海水表层温度由低变高

(B) 随着气温由低变高, 海水表层温度由高变低

(C) 随着气温由低变高, 海水表层温度有由低变高的趋势

(D) 随着气温由低变高, 海水表层温度有由高变低的趋势

14. 下列函数中, 最小正周期是 2π 的是 ( )

(A) $y=\sin x+\cos x$　(B) $y=\sin x\cos x$

(C) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$　(D) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$

15. 已知空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的点集 Ω, 对任意的 P_1、P_2、$P_3\in\Omega$, 均存在不全为 0 的实数 λ_1、λ_2、λ_3 满足 $\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\lambda_2\overrightarrow{OP_2}+\lambda_3\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$. 若 $(1,0,0)\in\Omega$, 则 $(0,0,1)\notin\Omega$ 的一个充分条件是 ( )

(A) $(0,0,0)\in\Omega$　(B) $(-1,0,0)\in\Omega$　(C) $(0,-1,0)\in\Omega$　(D) $(0,0,-1)\in\Omega$

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, $M=\{x_0|$ 对任意 $x\in(-\infty,x_0)$, $f(x)<f(x_0)\}$, 对于使得 $M=[-1,1]$ 的函数 $y=f(x)$, 以下说法正确的是 ( )

(A) 存在 $y=f(x)$ 是偶函数

(B) 存在 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值

(C) 存在 $y=f(x)$ 是严格增函数

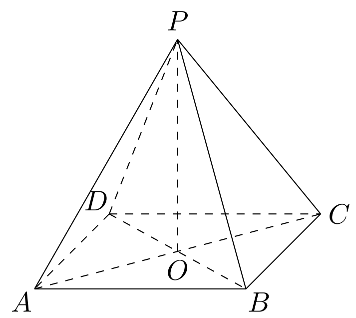
(D) 存在 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值

三、解答题

17. 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 为底面 $ABCD$ 的中心.

(1) 若 $AP=5$, $AD=3\sqrt{2}$, 将 $\triangle POA$ 绕直线 PO 旋转一周, 求所得旋转体的体积;

(2) 若 $AP=AD$, E 为 PB 的中点, 求直线 BD 与平面 AEC 所成角的大小.



18. 已知 $f(x)=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(4,2)$, 求 $f(2x-2)<f(x)$ 的解集;

(2) 若存在 x 使 $f(x+1)$、$f(ax)$、$f(x+2)$ 依次成等差数列, 求 a 的取值范围.

19. 某地区为调查初中学生体育锻炼时长与学业成绩的关系, 从该地区 29000 名初中生抽取 580 人, 得到日均体育锻炼时长 (表中简称时长) 与学业成绩的数据如下表所示:

时长	$[0,0.5)$	$[0.5,1)$	$[1,1.5)$	$[1.5,2)$	$[2,2.5)$	合计
优秀	5	44	42	3	1	95
不优秀	134	147	137	40	27	485
合计	139	191	179	43	28	580

(1) 估计该地区 29000 名初中生中体育锻炼时长大于 1 小时人数;
(2) 估计该地区初中生平均日均体育锻炼时长; (结果精确到 0.1 小时)
(3) 判断是否有 95% 的把握认为该地区初中生学业成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时有关?

时长	$[1,2)$	其他	合计
优秀	a	b	$a+b$
不优秀	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$, $P\left(\chi^2 \geqslant 3.841\right) \approx 0.05$.

20. 双曲线 Γ: $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$, 左、右顶点分别为 A_1、A_2, 过点 $M(-2,0)$ 的直线交 Γ 于两点 P、Q 两点.
(1) 若离心率 $e=2$, 求 b 的值;
(2) 若 $b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, 点 P 在第一象限, $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形, 求点 P 的坐标;
(3) 连接 QO (O 为坐标原点) 并延长交 Γ 于点 R, 若 $\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=1$, 求 b 的取值范围.

21. 设 D 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集, $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 对于点 $M(a,b)$, 记 $s(x)=(x-a)^2+(f(x)-b)^2$, 若对于点 $P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, 满足函数 $y=s(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值, 则称 P 是 M 的 f 最近点.
(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $M(0,0)$, $D=(0,+\infty)$, 求证: 存在 M 的 f 最近点;
(2) $f(x)=\mathrm{e}^x$, $M(1,0)$, $D=\mathbf{R}$, 若曲线 $y=f(x)$ 上一点 P 满足 MP 垂直于 $y=f(x)$ 在点 $P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线, 则 P 是否为 M 的 f 最近点?
(3) 已知 $D=\mathbf{R}$, $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$, $y=g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的函数值恒正. 对任意 $t\in\mathbf{R}$, 点 M_1 的坐标为 $(t-1,f(t)-g(t))$, 点 M_2 的坐标为 $(t+1,f(t)+g(t))$, 若对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 总存在 $y=f(x)$ 上一点 P, 使得 P 既是 M_1 的 f 最近点, 又是 M_2 的 f 最近点, 试求 $y=f(x)$ 的单调性.