2024 普通高等学校招生考试 (全国甲卷文)

一、单选题

1. 若 $z=\sqrt{2}\mathrm{i}$, 则 $z\bar{z}=$ ( )

(A) -2 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

2. 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 9\}$, $B=\{x \mid x+1\in A\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{1,\ 2,\ 3\}$ (B) $\{3,\ 4,\ 9\}$ (C) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (D) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$, $\boldsymbol{b}=(x,2)$, $\boldsymbol{c}=(1,1)$, 若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线, 则 $x=$ ( )

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$

4. 某独唱比赛的决赛阶段共有甲、乙、丙、丁四人参加, 每人出场一次, 出场次序由随机抽签确定. 则丙不是第一个出场, 且甲或乙最后出场的概率是( )

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_9=1$, 则 $a_3+a_7=$ ( )

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

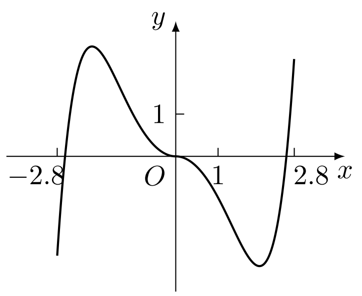
6. 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0,4)$, $(0,-4)$, 点 $(-6,4)$ 在该双曲线上, 则该双曲线的离心率为 ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

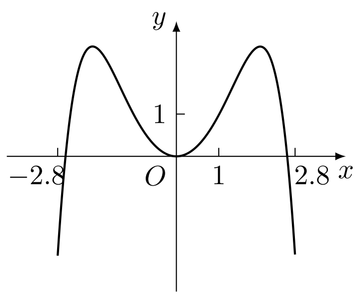
7. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+2\sin x}{1+x^2}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 ( )

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

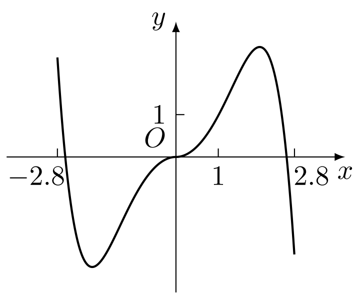
8. 函数 $y=-x^2+(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8,2.8]$ 的图象大致为 ( )



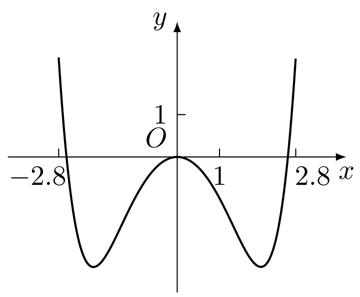
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 直线 $2x-y-2=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x-8y=0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$ ( )

(A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 10

10. 已知 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$, 则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ( )

(A) $2\sqrt{3}+1$ (B) $2\sqrt{3}-1$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $1-\sqrt{3}$

11. 设 α, β 为两个平面, m, n 为两条直线, 且 $\alpha\cap\beta=m$. 下述四个命题:

① 若 $m /\!/ n$, 则 $n /\!/ \alpha$ 或 $n /\!/ \beta$;

② 若 $m\perp n$, 则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$;

③ 若 $n /\!/ \alpha$ 且 $n /\!/ \beta$, 则 $m /\!/ n$;

④ 若 n 与 α, β 所成的角相等, 则 $m\perp n$.

其中所有真命题的编号是 ( )

(A) ①③ (B) ②④ (C) ①②③ (D) ①③④

12. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $B=60^\circ$, $b^2=\frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A+\sin C=$ ( )

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 的最大值为______.

14. 已知圆台甲、乙的上底面半径均为 r_1, 下底面半径均为 r_2, 圆台甲、乙的母线长分别为 $2(r_2-r_1)$, $3(r_2-r_1)$, 则圆台甲与乙的体积之比为______.

15. 已知 $a>1$ 且 $\dfrac{1}{\log_8 a}-\dfrac{1}{\log_a 4}=-\dfrac{5}{2}$, 则 $a=$______.

16. 当 $x>0$ 时, 曲线 $y=x^3-3x$ 与曲线 $y=-(x-1)^2+a$ 有两个交点, 则 a 的取值范围是______.

三、解答题

17. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $2S_n=3a_{n+1}-3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和.

18. 某工厂进行生产线智能化升级改造. 升级改造后, 从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验, 数据如下:

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表:

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异? 能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异?

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$. 设 $\bar{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率, 如果 $\bar{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, 则认为该工厂产品的优级品率提高了. 根据抽取的 150 件产品的数据, 能否认为生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了? ($\sqrt{150}\approx 12.247$)

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

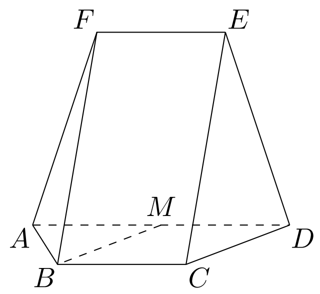
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

.

19. 如图, 在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中, 四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形, $EF /\!/ AD$, $BC /\!/ AD$, $AD=4$, $AB=BC=EF=2$, $ED=\sqrt{10}$, $FB=2\sqrt{3}$, M 为 AD 的中点.

(1) 证明: $BM /\!/$ 平面 CDE;

(2) 求 M 到平面 FAB 的距离.



20. 已知函数 $f(x)=a(x-1)-\ln x+1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a\leqslant 2$, 证明: 当 $x>1$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^{x-1}$.

21. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 F, 点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在 C 上, 且 $MF\perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(4,0)$ 的直线交 C 于 A, B 两点, N 为线段 FP 的中点, 直线 NB 交直线 MF 于点 Q, 证明: $AQ\perp y$ 轴.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho\cos\theta+1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l: $\begin{cases}x=t,\\ y=t+a\end{cases}$ (t 为参数), 若 C 与 l 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=2$, 求 a.

23. 已知实数 a, b 满足 $a+b\geqslant 3$.

(1) 证明: $2a^2+2b^2>a+b$;

(2) 证明: $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.