

## 2024 普通高等学校招生考试 (全国甲卷理)

### 一、单选题

1. 若  $z = 5 + i$ , 则  $i(\bar{z} + z) =$  ( )  
 (A)  $10i$  (B)  $2i$  (C)  $10$  (D)  $2$

2. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ,  $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$ , 则  $\complement_A(A \cap B) =$  ( )  
 (A)  $\{1, 4, 9\}$  (B)  $\{3, 4, 9\}$  (C)  $\{1, 2, 3\}$  (D)  $\{2, 3, 5\}$

3. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 4x - 3y - 3 \geq 0, \\ x - 2y - 2 \leq 0, \\ 2x + 6y - 9 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = x - 5y$  的最小值为 ( )

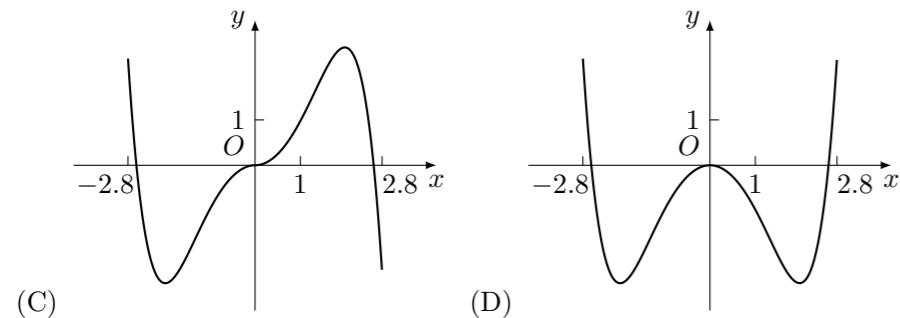
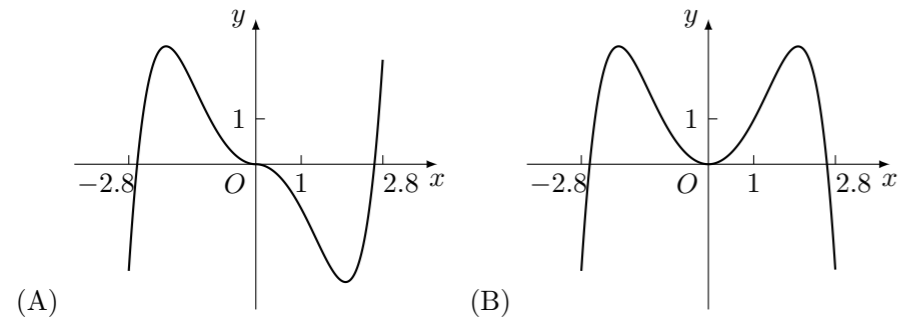
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $0$  (C)  $-\frac{5}{2}$  (D)  $-\frac{7}{2}$

4. 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 已知  $S_5 = S_{10}$ ,  $a_5 = 1$ , 则  $a_1 =$  ( )  
 (A)  $\frac{7}{2}$  (B)  $\frac{7}{3}$  (C)  $-\frac{1}{3}$  (D)  $-\frac{7}{11}$

5. 已知双曲线的两个焦点分别为  $(0, 4)$ ,  $(0, -4)$ , 点  $(-6, 4)$  在该双曲线上, 则该双曲线的离心率为 ( )  
 (A)  $4$  (B)  $3$  (C)  $2$  (D)  $\sqrt{2}$

6. 设函数  $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1 + x^2}$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 1)$  处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{2}{3}$

7. 函数  $y = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$  在区间  $[-2.8, 2.8]$  的图象大致为 ( )



8. 已知  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$ , 则  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )

(A)  $2\sqrt{3} + 1$  (B)  $2\sqrt{3} - 1$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $1 - \sqrt{3}$

9. 设向量  $\mathbf{a} = (x + 1, x)$ ,  $\mathbf{b} = (x, 2)$ , 则 ( )

(A)  $x = -3$  是  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  的必要条件  
 (B)  $x = 1 + \sqrt{3}$  是  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  的必要条件  
 (C)  $x = 0$  是  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  的充分条件  
 (D)  $x = -1 + \sqrt{3}$  是  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  的充分条件

10. 设  $\alpha, \beta$  为两个平面,  $m, n$  为两条直线, 且  $\alpha \cap \beta = m$ . 下述四个命题:

① 若  $m \parallel n$ , 则  $n \parallel \alpha$  或  $n \parallel \beta$ ;  
 ② 若  $m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha$  或  $n \perp \beta$ ;  
 ③ 若  $n \parallel \alpha$  且  $n \parallel \beta$ , 则  $m \parallel n$ ;  
 ④ 若  $n$  与  $\alpha, \beta$  所成的角相等, 则  $m \perp n$ .

其中所有真命题的编号是 ( )

(A) ①③ (B) ②④ (C) ①②③ (D) ①③④

11. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $B = 60^\circ$ ,  $b^2 = \frac{9}{4}ac$ , 则  $\sin A + \sin C =$  ( )

(A)  $\frac{3}{2}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知  $b$  是  $a, c$  的等差中项, 直线  $ax + by + c = 0$  与圆  $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则  $|AB|$  的最小值为 ( )

(A)  $1$  (B)  $2$  (C)  $4$  (D)  $2\sqrt{5}$

### 二、填空题

13.  $\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$  的展开式中, 各项系数中的最大值为\_\_\_\_\_.

14. 已知圆台甲、乙的上底面半径均为  $r_1$ , 下底面半径均为  $r_2$ , 圆台甲、乙的母线长分别为  $2(r_2 - r_1)$ ,  $3(r_2 - r_1)$ , 则圆台甲与乙的体积之比为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $a > 1$  且  $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

16. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中无放回地随机取 3 次, 每次取 1 个球. 设  $m$  为前两次取出的球上数字的平均值,  $n$  为取出的三个球上数字的平均值, 则  $m$  与  $n$  之差的绝对值不大于  $\frac{1}{2}$  的概率为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造. 升级改造后, 从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验, 数据如下:

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表:

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异? 能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异?

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率  $p = 0.5$ . 设  $\bar{p}$  为升级改造后抽取的  $n$  件产品的优级品率, 如果  $\bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ , 则认为该工厂产品的优级品率提高了. 根据抽取的 150 件产品的数据, 能否认为生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了? ( $\sqrt{150} \approx 12.247$ )

附:  $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,

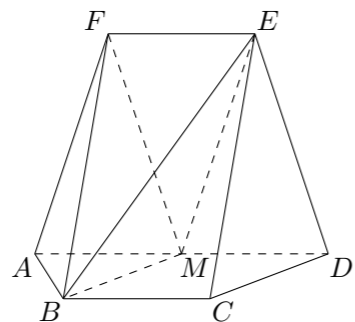
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

18. 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $4S_n = 3a_n + 4$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = (-1)^{n-1}na_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

19. 如图, 在以  $A, B, C, D, E, F$  为顶点的五面体中, 四边形  $ABCD$  与四边形  $ADEF$  均为等腰梯形,  $EF \parallel AD, BC \parallel AD, AD = 4, AB = BC = EF = 2, ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}, M$  为  $AD$  的中点.
- (1) 证明:  $BM \parallel$  平面  $CDE$ ;  
 (2) 求二面角  $F-BM-E$  的正弦值.



21. 已知函数  $f(x) = (1 - ax) \ln(1 + x) - x$ .
- (1) 若  $a = -2$ , 求  $f(x)$  的极值;  
 (2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围.

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ .
- (1) 写出  $C$  的直角坐标方程;  
 (2) 设直线  $l: \begin{cases} x = t, \\ y = t + a \end{cases}$  ( $t$  为参数), 若  $C$  与  $l$  相交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 2$ , 求  $a$ .

20. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 点  $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在  $C$  上, 且  $MF \perp x$  轴.
- (1) 求  $C$  的方程;  
 (2) 过点  $P(4, 0)$  的直线交  $C$  于  $A, B$  两点,  $N$  为线段  $FP$  的中点, 直线  $NB$  交直线  $MF$  于点  $Q$ , 证明:  $AQ \perp y$  轴.

23. 已知实数  $a, b$  满足  $a + b \geq 3$ .
- (1) 证明:  $2a^2 + 2b^2 > a + b$ ;  
 (2) 证明:  $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$ .