2024 普通高等学校招生考试 (北京卷)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -3<x<1\}$, $N=\{x\mid -1\leqslant x<4\}$, 则 $M\cup N=$( )

(A) $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$ (B) $\{x\mid x>-3\}$

(C) $\{x\mid -3<x<4\}$ (D) $\{x\mid x<4\}$

2. 若复数 z 满足 $\dfrac{z}{\mathrm{i}}=-1-\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $-1-\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

3. 圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) 3 (D) $3\sqrt{2}$

4. 在 $(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式中, x^3 的系数为 ( )

(A) 6 (B) -6 (C) 12 (D) -12

5. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是向量, 则“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$”是“$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

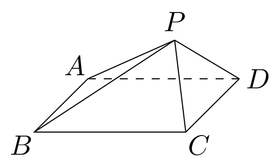
6. 设函数 $f(x)=\sin\omega x\ (\omega>0)$. 已知 $f(x_1)=-1$, $f(x_2)=1$, 且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\omega=$ ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 生物丰富度指数 $d=\dfrac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标, 其中 S, N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数. 生物丰富度指数 d 越大, 水质越好. 如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化, 生物个体总数由 N_1 变为 N_2, 生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15, 则 ( )

(A) $3N_2=2N_1$ (B) $2N_2=3N_1$ (C) $N_2^2=N_1^3$ (D) $N_2^3=N_1^2$

8. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $PA=PB=4$, $PC=PD=2\sqrt{2}$. 该棱锥的高为 ( )



(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

9. 已知 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点, 则 ( )

(A) $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$ (B) $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>\dfrac{x_1+x_2}{2}$

(C) $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$ (D) $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

10. 已知 $M=\{(x,y)\mid y=x+t(x^2-x),\ 1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是平面直角坐标系中的点集. 设 d 是 M 中两点间的距离的最大值, S 是 M 表示的图形的面积, 则 ( )

(A) $d=3$, $S<1$ (B) $d=3$, $S>1$

(C) $d=\sqrt{10}$, $S<1$ (D) $d=\sqrt{10}$, $S>1$

二、填空题

11. 抛物线 $y^2=16x$ 的焦点坐标为______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于原点对称. 若 $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$, 则 $\cos\beta$ 的最大值为______.

13. 若直线 $y=k(x-3)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点, 则 k 的一个取值为______.

14. 汉代刘歆设计的“铜嘉量”是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器, 其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱. 若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列, 底面直径依次为 65 mm, 325 mm, 325 mm, 且斛量器的高为 230 mm, 则斗量器的高为______mm, 升量器的高为______mm. (不计量器的厚度)

15. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个不同的无穷数列, 且都不是常数列. 记集合 $M=\{k\mid a_k=b_k,\ k\in\mathbf{N}^*\}$, 给出下列四个结论:

① 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 则 M 中最多有 1 个元素;

② 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等比数列, 则 M 中最多有 2 个元素;

③ 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 则 M 中最多有 3 个元素;

④ 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, $\{b_n\}$ 为递减数列, 则 M 中最多有 1 个元素.

其中正确结论的序号是______.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 为钝角, $a=7$, $\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

(1) 求 $\angle A$;

(2) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使得 $\triangle ABC$ 存在, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

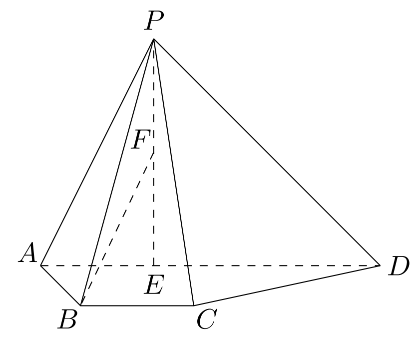
条件①: $b=7$; 条件②: $\cos B=\dfrac{13}{14}$; 条件③: $c\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (2) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC\parallel AD$, $AB=BC=1$, $AD=3$. 点 E 在 AD 上, 且 $PE\perp AD$, $PE=DE=2$.

(1) 若 F 为线段 PE 的中点, 求证: $BF\parallel$ 平面 PCD;

(2) 若 $AB\perp$ 平面 PAD, 求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.



18. 某保险公司为了解该公司某种保险产品的索赔情况, 从合同保险期限届满的保单中随机抽取 1000 份, 记录并整理这些保单的索赔情况, 获得数据如下表:

索赔次数	0	1	2	3	4
保单份数	800	100	60	30	10

假设: 一份保单的保费为 0.4 万元; 前三次索赔时, 保险公司每次赔偿 0.8 万元; 第四次索赔时, 保险公司赔偿 0.6 万元.

假设不同保单的索赔次数相互独立. 用频率估计概率.

(1) 估计一份保单索赔次数不少于 2 的概率;

(2) 一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差.

① 记 X 为一份保单的毛利润, 估计 X 的数学期望 EX;

② 如果无索赔的保单的保费减少 4%, 有索赔的保单的保费增加 20%, 试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与①中 EX 估计值的大小. (结论不要求证明)

19. 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形. 过点 $(0,t)$ $(t>\sqrt{2})$ 且斜率存在的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A, B, 过点 A 和 $C(0,1)$ 的直线 AC 与椭圆 E 的另一个交点为 D.
(1) 求椭圆 E 的方程及离心率;
(2) 若直线 BD 的斜率为 0, 求 t 的值.

20. 设函数 $f(x)=x+k\ln(1+x)$ $(k\neq 0)$, 直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ $(t>0)$ 处的切线.
(1) 当 $k=-1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 求证: l 不经过点 $(0,0)$;
(3) 当 $k=1$ 时, 设点 $A(t,f(t))$ $(t>0)$, $C(0,f(t))$, $O(0,0)$, B 为 l 与 y 轴的交点, $S_{\triangle ACO}$ 与 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示 $\triangle ACO$ 与 $\triangle ABO$ 的面积. 是否存在点 A 使得 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 成立? 若存在, 这样的点 A 有几个?
(参考数据: $1.09<\ln 3<1.10$, $1.60<\ln 5<1.61$, $1.94<\ln 7<1.95$)

21. 已知集合 $M=\{(i,j,k,w)\mid i\in\{1,\ 2\},\ j\in\{3,\ 4\},\ k\in\{5,\ 6\},\ w\in\{7,\ 8\}$, 且 $i+j+k+w$ 为偶数$\}$. 给定数列 A: a_1, a_2, $\cdots$, a_8 和序列 Ω: T_1, T_2, $\cdots$, T_s, 其中 $T_t=(i_t,j_t,k_t,w_t)\in M$ $(t=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$, 对数列 A 进行如下变换: 将 A 的第 i_1, j_1, k_1, w_1 项均加 1, 其余项不变, 得到的数列记作 $T_1(A)$; 将 $T_1(A)$ 的第 i_2, j_2, k_2, w_2 项均加 1, 其余项不变, 得到的数列记作 $T_2T_1(A)$; $\cdots$; 以此类推, 得到数列 $T_x\cdots T_2T_1(A)$, 简记为 $\Omega(A)$.
(1) 给定数列 A: 1, 3, 2, 4, 6, 3, 1, 9 和序列 Ω: $(1,3,5,7)$, $(2,4,6,8)$, $(1,3,5,7)$, 写出 $\Omega(A)$;
(2) 是否存在序列 Ω, 使得 $\Omega(A)$ 为 a_1+2, a_2+6, a_3+4, a_4+2, a_5+8, a_6+2, a_7+4, a_8+4? 若存在, 写出一个 Ω, 若不存在, 说明理由;
(3) 若数列 A 的各项均为正整数, 且 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数, 求证: "存在序列 Ω, 使得 $\Omega(A)$ 的各项都相等"的充要条件为"$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$".