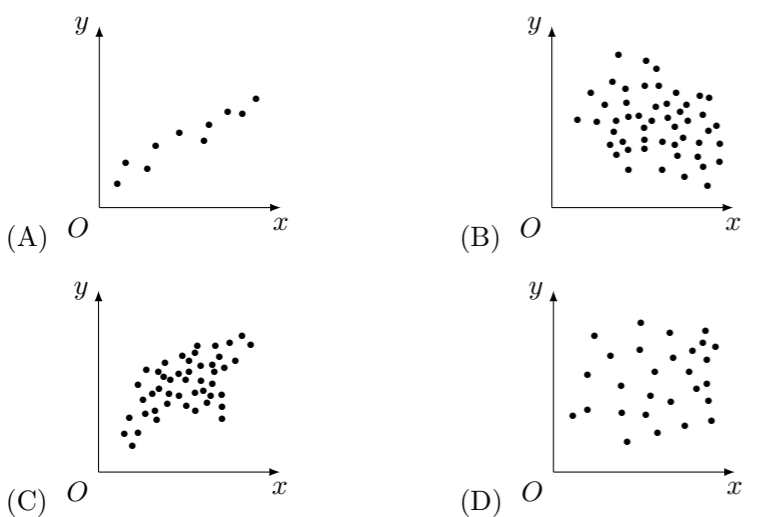
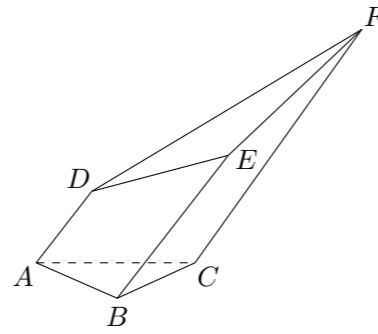


2024 普通高等学校招生考试 (天津卷)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{2, 3, 4\}$ (C) $\{2, 4\}$ (D) $\{1\}$
- 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a^3 = b^3$ ”是“ $3^a = 3^b$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 下列图中, 相关性系数最大的是 ()

- 下列函数是偶函数的为 ()
 (A) $y = \frac{e^x - x^2}{e^x + x^2}$ (B) $y = \frac{\cos x - x^2}{x^2 + 1}$ (C) $y = \frac{e^x - x}{e^x + x}$ (D) $y = \frac{\sin x - x}{x^2 + 1}$
- 设 $a = 4.2^{-0.2}$, $b = 4.2^{0.2}$, $c = \log_{4.2} 0.2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < b < a$ (D) $c < a < b$
- 已知 m, n 是两条直线, α 是一个平面. 下列命题正确的是 ()
 (A) 若 $m \parallel \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$ (B) 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$
 (C) 若 $m \parallel \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \perp n$ (D) 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \perp n$
- 已知函数 $f(x) = 3 \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$ 上的最小值为 ()
 (A) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{3}{2}$
- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线右支上, 直线 PF_2 的斜率为 2. 若 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形, 且面积为 8, 则双曲线的方程为 ()
 (A) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ (C) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

- 在如图五面体中, 棱 AD, BE, CF 互相平行, 且两两之间的距离均为 1. 若 $AD = 1, BE = 2, CF = 3$, 则该五面体的体积为 ()



- (A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$

二、填空题

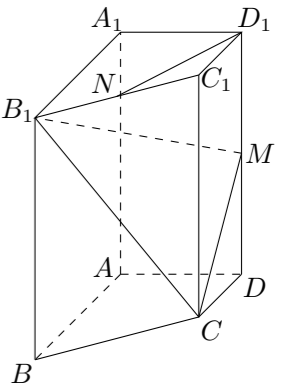
- i 是虚数单位, 复数 $(\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - 2i) =$ _____.
- 在 $(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2})^6$ 的展开式中, 常数项为_____.
- 已知圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 的圆心与抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F 重合, 且两曲线在第一象限的交点为 A , 则原点到直线 AF 的距离为_____.
- 某校组织学生参加农业实践活动, 期间安排了劳动技能比赛, 比赛共 5 个项目, 分别为整地做畦、旱田播种、作物移栽、田间灌溉、藤架搭建, 规定每人参加其中 3 个项目. 假设每人参加每个项目的可能性相同, 则甲同学参加“整地做畦”项目的概率为_____; 已知乙同学参加的 3 个项目中有“整地做畦”, 则他还参加“田间灌溉”项目的概率为_____.
- 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EC}$. 若 $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC}$, 其中 λ, μ 为实数, 则 $\lambda + \mu =$ _____; 设 F 是线段 BE 上的动点, G 为线段 AF 的中点, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 的最小值为_____.
- 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = 2\sqrt{x^2 - ax} - |ax - 2| + 1$. 若 $f(x)$ 恰有一个零点, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\cos B = \frac{9}{16}$, $b = 5, \frac{a}{c} = \frac{2}{3}$.
 (1) 求 a 的值;
 (2) 求 $\sin A$ 的值;
 (3) 求 $\cos(B - 2A)$ 的值.

- 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AB \parallel DC$, $AB = AA_1 = 2, AD = DC = 1$, M, N 分别为 DD_1, B_1C_1 的中点.

- 求证: $D_1N \parallel$ 平面 CB_1M ;
- 求平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值;
- 求点 B 到平面 CB_1M 的距离.



18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$. 左顶点为 A , 下顶点为 B , 点 C 为线段 OB 的中点 (O 为原点), $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 过点 C 的动直线与椭圆相交于 P, Q 两点. 在 y 轴上是否存在点 T , 使得 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} \leq 0$ 恒成立? 若存在, 求出点 T 纵坐标的取值范围; 若不存在, 请说明理由.
19. 已知 $\{a_n\}$ 为公比大于 0 的等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1, S_2 = a_3 - 1$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n ;
- (2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} k, & n = a_k, \\ b_{n-1} + 2k, & a_k < n < a_{k+1}, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.
- ① 求证: 当 $n = a_{k+1}$ ($k \in \mathbf{N}^*$, 且 $k > 1$) 时, $b_{n-1} \geq a_k b_n$;
- ② 求 $\sum_{i=1}^{S_n} b_i$.
20. 已知函数 $f(x) = x \ln x$.
- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x) \geq a(x - \sqrt{x})$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 成立, 求实数 a 的值;
- (3) 若 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 求证: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}}$.