2024 普通高等学校招生考试 (新高考 I)

一、单选题

1. 已知集合 $=\{x\mid -5<x^3<5\}$, $B=\{-3,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3\}$, 则 $A\cap B=$ (　)
(A) $\{-1,\ 0\}$　(B) $\{2,\ 3\}$　(C) $\{-3,\ -1,\ 0\}$　(D) $\{-1,\ 0,\ 2\}$

2. 若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$, 则 $z=$ (　)
(A) $-1-\mathrm{i}$　(B) $-1+\mathrm{i}$　(C) $1-\mathrm{i}$　(D) $1+\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,x)$, 若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$ 则 $x=$ (　)
(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$, $\tan\alpha\tan\beta=2$, 则 $\cos(\alpha-\beta)=$ (　)
(A) $-3m$　(B) $-\dfrac{m}{3}$　(C) $\dfrac{m}{3}$　(D) $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等, 侧面积相等, 且它们的高均为 $\sqrt{3}$, 则圆锥的体积为 (　)
(A) $2\sqrt{3}\pi$　(B) $3\sqrt{3}\pi$　(C) $6\sqrt{3}\pi$　(D) $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, & x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 (　)
(A) $(-\infty,0]$　(B) $[-1,0]$　(C) $[-1,1]$　(D) $[0,+\infty)$

7. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时, 曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为 (　)
(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 8

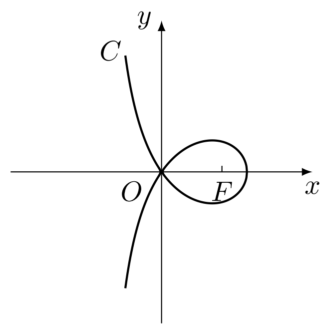
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$, 且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$, 则下列结论中一定正确的是 (　)
(A) $f(10)>100$　(B) $f(20)>1000$　(C) $f(10)<1000$　(D) $f(20)<10000$

二、多选题

9. 随着"一带一路"国际合作的深入, 某茶叶种植区多措并举推动茶叶出口. 为了解推动出口后的亩收入 (单位: 万元) 情况, 从该种植区抽取样本, 得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{x}=2.1$, 样本方差 $s^2=0.01$. 已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$, 假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\overline{x},s^2)$, 则 (若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$) (　)
(A) $P(X>2)>0.2$　(B) $P(X>2)<0.5$
(C) $P(Y>2)>0.5$　(D) $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$, 则 (　)
(A) $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点
(B) 当 $0<x<1$ 时, $f(x)<f(x^2)$
(C) 当 $1<x<2$ 时, $-4<f(2x-1)<0$
(D) 当 $-1<x<0$ 时, $f(2-x)>f(x)$

11. 设计一条美丽的丝带, 其造型可以看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O, 且 C 上的点满足: 横坐标大于 -2; 到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a\ (a<0)$ 的距离之积为 4. 则 (　)



(A) $a=-2$
(B) 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上
(C) C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1
(D) 当点 (x_0,y_0) 在 C 上时, $y_0\leqslant\dfrac{4}{x_0+2}$

三、填空题

12. 设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点. 若 $|F_1A|=13$, $|AB|=10$, 则 C 的离心率为______.

13. 若曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线, 则 $a=$______.

14. 甲、乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛. 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上数字的大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为______.

四、解答题

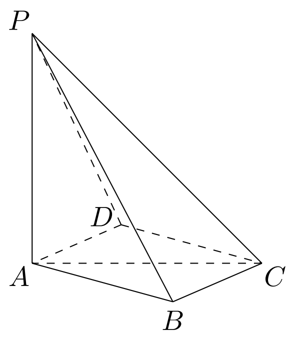
15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$, $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.
(1) 求 B;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$, 求 c.

16. 已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ 为椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上两点.
(1) 求 C 的离心率;
(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B, 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

17. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=AC=2$, $BC=1$, $AB=\sqrt{3}$.

(1) 若 $AD\perp PB$, 证明: $AD\,/\!/$ 平面 PBC;

(2) 若 $AD\perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD.



18. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

(1) 若 $b=0$, 且 $f'(x)\geqslant 0$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$, 求 b 的取值范围.

19. 设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 a_j $(i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{4m+2}$ 是 $(i,j)-$ 可分数列.

(1) 写出所有的 (i,j), $1\leqslant i<j\leqslant 6$, 使得数列 $a_1, a_2, \cdots, a_6$ 是 $(i,j)-$ 可分数列;

(2) 当 $m\geqslant 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{4m+2}$ 是 $(2,13)-$ 可分数列;

(3) 从 $1, 2, \cdots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j $(i<j)$, 记数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{4m+2}$ 是 $(i,j)-$ 可分数列的概率为 P_m, 证明: $P_m>\dfrac{1}{8}$.