2024 普通高等学校招生考试 (新高考 II)

一、单选题

1. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

2. 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $|x+1|>1$; 命题 q: $\exists x>0$, $x^3=x$. 则 ( )

(A) p 和 q 都是真命题　(B) $\neg p$ 和 q 都是真命题

(C) p 和 $\neg q$ 都是真命题　(D) $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$, 且 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 1

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻, 得到各块稻田的亩产量 (单位: kg) 并整理得下表:

亩产量	$[900,950)$	$[950,1000)$	$[1000,1050)$
频数	6	12	18
亩产量	$[1050,1100)$	$[1100,1150)$	$[1150,1200)$
频数	30	24	10

根据表中数据, 下列结论中正确的是 ( )

(A) 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg

(B) 100 块稻田中亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 80%

(C) 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 至 300 kg 之间

(D) 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 至 1000 kg 之间

5. 已知曲线 C: $x^2+y^2=16$ $(y>0)$, 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP', P' 为垂足, 则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $(y>0)$　(B) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$ $(y>0)$

(C) $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$ $(y>0)$　(D) $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{8}=1$ $(y>0)$

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$, $g(x)=\cos x+2ax$. 当 $x\in(-1,1)$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点. 则 $a=$ ( )

(A) -1　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\dfrac{52}{3}$, $AB=6$, $A_1B_1=2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) 2　(D) 3

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$. 若 $f(x)\geqslant 0$, 则 a^2+b^2 的最小值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1

二、多选题

9. 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, 下列说法中正确的有 ( )

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点

(B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

10. 抛物线 C: $y^2=4x$ 的准线为 l, P 为 C 上动点. 过 P 作 $\odot A$: $x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线, Q 为切点. 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B. 则 ( )

(A) l 与 $\odot A$ 相切

(B) 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ|=\sqrt{15}$

(C) 当 $|PB|=2$ 时, $PA\perp AB$

(D) 满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$, 则 ( )

(A) 当 $a>1$ 时, $f(x)$ 有三个零点

(B) 当 $a<0$ 时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) 存在 a, b, 使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

(D) 存在 a, 使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

三、填空题

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_3+a_4=7$, $3a_2+a_5=5$, 则 $S_{10}=$______.

13. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan\alpha+\tan\beta=4$, $\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$, 则 $\sin(\alpha+\beta)=$______.

14. 在如图的 4×4 的方格表中选 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有______种选法. 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格中的 4 个数之和的最大值是______.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=2$, $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

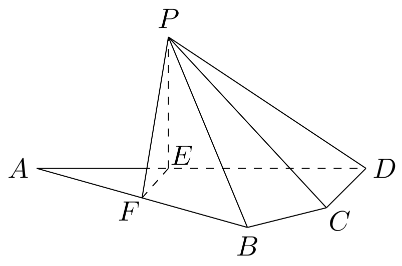
(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.

17. 如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $CD=3$, $AD=5\sqrt{3}$, $\angle ADC=90°$, $\angle BAD=30°$, 点 E, F 满足 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 翻折至 $\triangle PEF$, 使得 $PC=4\sqrt{3}$.

(1) 证明: $EF\perp PD$;

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.



18. 某投篮比赛分为两个阶段, 每个参赛队由两名队员组成. 比赛具体规则如下: 第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次, 若 3 次都未投中, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少投中 1 次, 则该队进入第二阶段. 第二阶段由该队的另一名队员投篮 3 次, 每次投篮投中得 5 分, 未投中得 0 分. 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和. 某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为 p, 乙每次投中的概率为 q, 各次投中与否相互独立.

(1) 若 $p=0.4$, $q=0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率;

(2) 假设 $0<p<q$.

① 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

② 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

19. 已知双曲线 C: $x^2-y^2=m$ $(m>0)$, 点 $P_1(5,4)$ 在 C 上, k 为常数, $0<k<1$. 按照如下方式依次构造点 P_n $(n=2,3,\cdots)$: 过点 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支点交于点 Q_{n-1}, 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点. 记 P_n 的坐标为 (x_n,y_n).

(1) 若 $k=\frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2;

(2) 证明: 数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列;

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积. 证明: 对于任意正整数 n, $S_n=S_{n+1}$.