2025 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 已知全集 $U=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 5,\ x \in \mathbf{R}\}$, 若集合 $A=\{x \mid 2 \leqslant x<4,\ x \in \mathbf{R}\}$, 则 $\overline{A}=$______.

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $\dfrac{x-1}{x-3}<0$ 的解集为______.

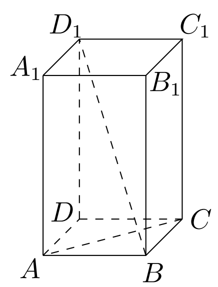
3. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-3$, 公差 $d=2$, 则该数列的前 6 项的和为______.

4. 在 $(2x-1)^5$ 的二项展开式中, x^3 项的系数为______.

5. 函数 $y=\cos x,\ x \in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 的值域为______.

6. 若随机变量 X 的分布为 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$, 则期望 $E(X)=$______.

7. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 若 $AC=4\sqrt{2}$, $BD_1=9$, 则其体积为______.

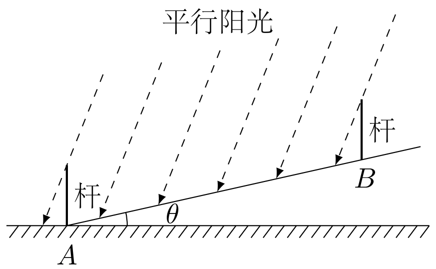


8. 设 a、$b>0$, 若 $a+\dfrac{1}{b}=1$, 则 $b+\dfrac{1}{a}$ 的最小值为______.

9. 有 4 名家长和 2 名儿童去郊游爬山. 若 6 个人要排成一队列, 要求队列的首和尾均是家长, 则不同的排列方式共有______种.

10. i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $z^2=(\overline{z})^2$, 且 $|z| \leqslant 1$, 则 $|z-2-3\mathrm{i}|$ 的最小值为______.

11. 小申同学观察发现, 生活中有时候影子可以完全投射在斜面上. 某斜面上有两根长为 1 米且垂直于水平面放置的杆子, 与斜面的接触点分别为 A、B, 它们在阳光的照射下呈现出影子, 阳光可视为平行光, 其中 A 处杆子的影子在水平面上, 长度为 0.4 米, B 处杆子的影子完全在斜面上, 长度为 0.45 米. 则斜面的坡角 $\theta=$______. (结果精确到 0.01°)



12. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0,\end{cases}$ 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是平面内三个不同的单位向量, 若 $f(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})+f(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})+f(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})=0$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的取值范围是______.

二、选择题

13. 已知事件 A、B 相互独立, 若 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$, 则 $P(A \cap B)$ 的值为(　)

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

14. 已知 $a>0$ 且 $a \neq 1$, $s \in \mathbf{R}$, 下列各项中, 能推出 $a^s>a$ 的是 (　)

(A) $a>1,\ s>0$　　(B) $a>1,\ s<0$

(C) $0<a<1,\ s>0$　　(D) $0<a<1,\ s<0$

15. 已知点 $A(0,1)$, $B(1,2)$, 若动点 C 在曲线 $x^2-y^2=1\ (x \geqslant 1,\ y \geqslant 0)$ 上, 则 $\triangle ABC$ 的面积 (　)

(A) 有最大值, 无最小值　　(B) 无最大值, 有最小值

(C) 有最大值, 有最小值　　(D) 无最大值, 无最小值

16. 设 $\lambda \in \mathbf{R}$, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足 $a_n=10n-9$, $b_n=2^n$, $c_n=\lambda a_n+(1-\lambda) b_n$. 若对任意的 $\lambda \in[0,1]$, a_n, b_n, c_n 均能作为三角形的三边长, 则满足条件的正整数 n 有 (　)

(A) 1 个　　(B) 3 个　　(C) 4 个　　(D) 无穷多个

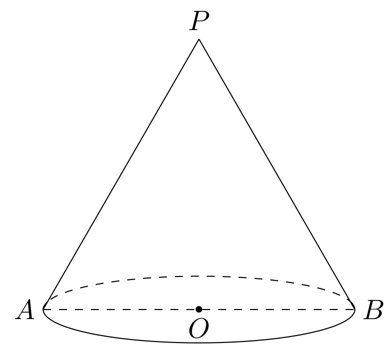
三、解答题

17. 2024 年东京奥运会, 中国获得了男子 4×100 米混合泳接力金牌, 以下是历届奥运会男子 4×100 米混合泳接力项目冠军成绩 (单位: 秒), 数据按照升序排列.

206.78	207.46	207.95	209.34	209.35
210.68	213.73	214.84	216.93	216.93

(1) 求这组数据的极差与中位数;
(2) 从这 10 个数据中任选 3 个, 求恰有 2 个数据大于 211 的概率;
(3) 若比赛成绩 y 关于年份 x 的回归方程为 $y=-0.311x+\hat{b}$, 年份 x 的平均数为 2006, 请预测 2028 年男子 4×100 米混合泳接力项目冠军队的成绩. (结果精确到 0.01 秒)

18. 如图, 点 P 是圆锥的顶点, 点 O 是底面圆心, 底面直径 $AB=2$.
(1) 若直线 PA 与圆锥底面所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 求圆锥的侧面积;
(2) 若 Q 是母线 PA 的中点, 点 C、D 在底面圆周上, AC 弧长为 $\dfrac{\pi}{3}$, $CD \parallel AB$, 点 T 在线段 OC 上, 求证: 直线 $QT \parallel$ 平面 PBD.



19. 设 $m\in\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-(m+2)x+m\ln x$.

(1) 若 $f(1)=0$, 求不等式 $f(x)\leqslant x^2-1$ 的解集;

(2) 若 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在极大值, 求 m 的取值范围.

20. 设椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{5}=1$ $(a>\sqrt{5})$, 点 A 为 Γ 的右顶点, 点 $M(0,m)$ $(m>0)$.

(1) 若 Γ 的一个焦点是 $(2,0)$, 求 Γ 的离心率;

(2) 设 $a=4$, 椭圆 Γ 上存在一点 P 满足 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{MP}$, 求 m 的值;

(3) 若线段 AM 的中垂线 l 的斜率为 2, l 与椭圆 Γ 交于 C、D 两点, 且 $\angle CMD$ 为钝角, 求 a 的取值范围.

21. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对于正实数 a, 定义集合 $M_a=\{x\mid f(x+a)=f(x),\ x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 设 $f(x)=\sin x$, 判断 $\dfrac{\pi}{3}$ 是否是 M_π 中的元素, 并说明理由;

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $M_a\neq\varnothing$, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $y=f(x)$ 是偶函数, 当 $x\in(0,1]$ 时, $f(x)=1-x$, 且对任意 $a\in(0,2)$, 均有 $M_a\subseteq M_2$. 写出当 $x\in(1,2)$ 时 $f(x)$ 的表达式, 并证明: 对任意实数 c, 函数 $y=f(x)-c$ 在区间 $[-3,3]$ 上至多有 9 个零点.