2025 普通高等学校招生考试 (北京卷)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x \mid 2x-1>5\}$, $N=\{1,\ 2,\ 3\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{1,\ 2,\ 3\}$ (B) $\{2,\ 3\}$ (C) $\{3\}$ (D) $\varnothing$

2. 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z+2=2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 8

3. 双曲线 $x^2-4y^2=4$ 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\dfrac{5}{4}$ (D) $\sqrt{5}$

4. 为了得到函数 $y=9^x$ 的图象, 只需把函数 $y=3^x$ 的图象上所有点的 ( )

(A) 横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)

(B) 横坐标变为原来的 2 倍 (纵坐标不变)

(C) 纵坐标变为原来的 $\dfrac{1}{3}$ 倍 (横坐标不变)

(D) 纵坐标变为原来的 3 倍 (横坐标不变)

5. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1=-2$, 若 a_3, a_4, a_6 成等比数列, 则 $a_{10}=$ ( )

(A) -20 (B) -18 (C) 16 (D) 18

6. 已知 $a>0$, $b>0$, 则 ( )

(A) $a^2+b^2>2ab$ (B) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{1}{ab}$ (C) $a+b>\sqrt{ab}$ (D) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 则"$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$"是"对任意 $M\in\mathbf{R}$, 存在 $x_0\in D$, 使得 $|f(x_0)|>M$"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 设函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x\ (\omega>0)$, 若 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立, 且 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点, 则 ω 的最小值为 ( )

(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 3

9. 在一定条件下, 某人工智能大语言模型训练 N 个单位的数据量所需要的时间 $T=k\log_2 N$ (单位: h), 其中 k 为常数. 在此条件下, 已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时, 训练时间增加 20 h; 当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时, 训练时间增加 ( )

(A) 2 h (B) 4 h (C) 20 h (D) 40 h

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$, 设 $C(3,4)$, 则 $\left|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|$ 的取值范围是 ( )

(A) $[6,14]$ (B) $[6,12]$ (C) $[8,14]$ (D) $[8,12]$

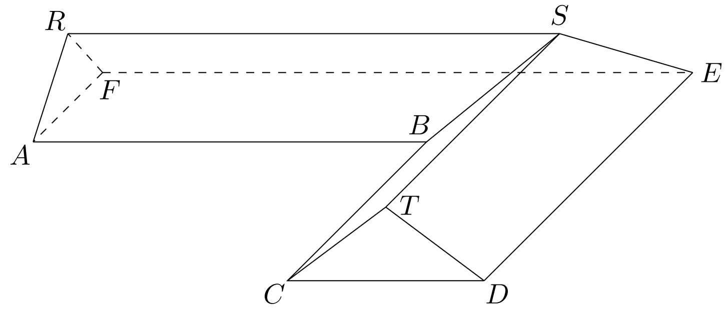
二、填空题

11. 已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的顶点到焦点的距离为 3, 则 $p=$ ______.

12. 已知 $(1-2x)^4=a_0-2a_1x+4a_2x^2-8a_3x^3+16a_4x^4$, 则 $a_0=$ ______; $a_1+a_2+a_3+a_4=$ ______.

13. 已知 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$, 且 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos(\alpha-\beta)$. 写出满足条件的一组 α, β 的值 $\alpha=$ ______, $\beta=$ ______.

14. 某科技兴趣小组用 3D 打印机制作的一个零件可以抽象为如图所示的多面体, 其中 $ABCDEF$ 是一个平面多边形, 平面 $AFR\perp$ 平面 ABC, 平面 $CDT\perp$ 平面 ABC, $AB\perp BC$, $AB\parallel EF\parallel RS\parallel CD$, $BC\parallel DE\parallel ST\parallel AF$. 若 $AB=BC=8$, $AF=CD=4$, $RA=RF=TC=TD=\dfrac{5}{2}$, 则该多面体的体积为______.



15. 关于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$, 给出下列四个结论:

① 存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立;

② 存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)-f(2x)=x$ 恒成立;

③ 使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个;

④ 使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个.

其中正确结论的序号是______.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A=-\dfrac{1}{3}$, $a\sin C=4\sqrt{2}$.

(1) 求 c 的值;

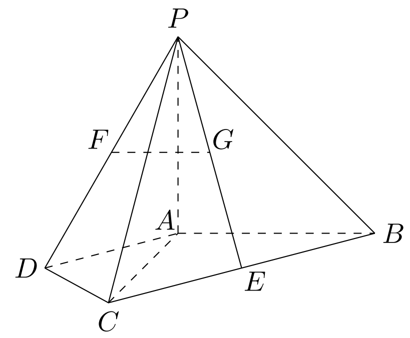
(2) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使得 $\triangle ABC$ 存在, 求 BC 边上的高.

条件①: $a=6$; 条件②: $a\sin B=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$; 条件③: $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{2}$.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle ADC$ 与 $\triangle BAC$ 均为等腰直角三角形, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle BAC=90^\circ$, E 为 BC 的中点.

(1) 若 F, G 分别为 PD, PE 的中点, 求证: $FG\parallel$ 平面 PAB;

(2) 若 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AC$, 求直线 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



18. 某次考试中, 只有一道单项选择题考查了某个知识点, 甲、乙两校的高一年级学生都参加了这次考试. 为了解学生对该知识点的掌握情况, 随机抽查了甲、乙两校高一年级各 100 名学生该题的答题数据, 其中甲校学生选择正确的人数为 80, 乙校学生选择正确的人数为 75. 假设学生之间答题相互独立. 用频率估计概率.

(1) 估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率 p;

(2) 从甲、乙两校高一年级学生中各随机抽取 1 名. 设 X 为这 2 名学生中该题选择正确的人数, 估计 $X=1$ 的概率及 X 的数学期望;

(3) 假设: 如果没有掌握该知识点, 学生就从题目给出的四个选项中随机选择一个作为答案; 如果掌握该知识点, 甲校学生选择正确的概率为 100%, 乙校学生选择正确的概率为 85%. 设甲、乙两校高一年级学生掌握该知识点的概率估计值分别为 p_1, p_2, 判断 p_1 与 p_2 的大小. (结论不要求证明)

19. 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆 E 上的点到两焦点的距离之和为 4.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 点 $M(x_0,y_0)$ $(x_0\neq 0)$ 在椭圆 E 上, 直线 $x_0x+2y_0y-4=0$ 与直线 $y=2$, $y=-2$ 分别交于点 A, B. 设 $\triangle OAM$ 和 $\triangle OBM$ 的面积分别为 S_1, S_2, 比较 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 与 $\dfrac{|OA|}{|OB|}$ 的大小.

20. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$, $f(0)=0$, 导函数 $f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. 设 l_1 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(a,f(a))$ $(a\neq 0)$ 处的切线.

(1) 求 $f'(x)$ 的最大值;

(2) 当 $-1<a<0$ 时, 证明: 除切点 A 外, 曲线 $y=f(x)$ 在直线 l_1 的上方;

(3) 设过点 A 的直线 l_2 与直线 l_1 垂直, l_1, l_2 与 x 轴交点的横坐标分别是 x_1, x_2. 若 $a>0$, 求 $\dfrac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}$ 的取值范围.

21. 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $M=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in A\}$. 从 M 中选取 n 个不同的元素组成一个序列: (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_n,y_n), 其中 (x_i,y_i) 称为该序列的第 i 项 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 若该序列的相邻项 (x_i,y_i), (x_{i+1},y_{i+1}) 满足 $\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=3,\\|y_{i+1}-y_i|=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=4,\\|y_{i+1}-y_i|=3\end{cases}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$, 则称该序列为 K 列.

(1) 对于第 1 项为 $(3,3)$ 的 K 列, 写出它的第 2 项;

(2) 设 $\varGamma$ 为 K 列, 且 $\varGamma$ 中的项 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 满足: 当 i 为奇数时, $x_i\in\{1,\ 2,\ 7,\ 8\}$; 当 i 为偶数时, $x_i\in\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, 判断 $(3,2)$, $(4,4)$ 能否同时为 $\varGamma$ 中的项, 并说明理由;

(3) 证明: 由 M 的全部元素组成的序列都不是 K 列.