2025 普通高等学校招生考试 (天津卷)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 集合 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

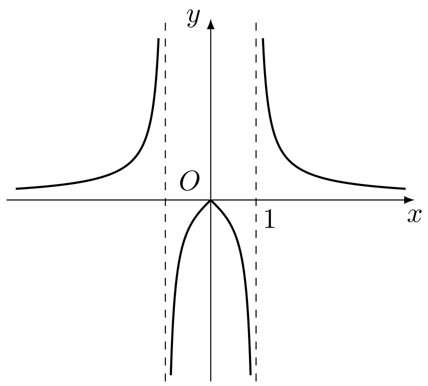
(A) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ (B) $\{1,\ 3,\ 4\}$ (C) $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$ (D) $\{4\}$

2. 已知 $x\in\mathbf{R}$, 则“$x=0$”是“$\sin 2x=0$”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 已知函数 $y=f(x)$ 的部分图象如下, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ( )



(A) $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ (B) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

(C) $f(x)=\dfrac{|x|}{1-x^2}$ (D) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

4. 已知 m 是一条直线, α, β 是两个平面. 下列命题正确的是 ( )

(A) 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$ (B) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

(C) 若 $m\parallel\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$ (D) 若 $\alpha\perp\beta$, $m\subset\alpha$, 则 $m\perp\beta$

5. 下列说法错误的是 ( )

(A) 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(X\leqslant\mu-\sigma)=P(X\geqslant\mu+\sigma)$

(B) 若随机变量 $X\sim N(1,2^2)$, $Y\sim N(2,2^2)$, 则 $P(X\leqslant 1)<P(Y\leqslant 2)$

(C) 样本相关系数的绝对值越接近 1, 则成对数据的线性相关程度越强

(D) 样本相关系数的绝对值越接近 0, 则成对数据的线性相关程度越弱

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=-n^2+8n$, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为 ( )

(A) 144 (B) 112 (C) 80 (D) 48

7. 函数 $f(x)=0.3^x-\sqrt{x}$ 的零点所在的一个区间是 ( )

(A) $(0,0.3)$ (B) $(0.3,0.5)$ (C) $(0.5,1)$ (D) $(1,2)$

8. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ -\pi<\varphi<\pi)$ 在区间 $\left[-\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, 直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴, 点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一个对称中心, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 ( )

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) -1 (D) 0

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2, 以 F_2 为焦点的抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 与双曲线在第一象限的交点为 P. 若 $|PF_1|+|PF_2|=3|F_1F_2|$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) 2 (B) 5 (C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

二、填空题

10. i 是虚数单位, $\left|\dfrac{3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=$______.

11. 在 $(x-1)^6$ 的展开式中, x^3 的系数为______.

12. 若直线 $x-y+6=0$ 与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 B, 与圆 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$ $(r>0)$ 交于 C, D 两点, 且 $|AB|=3|CD|$, 则 $r=$______.

13. 小颖同学去某健康主题公园沿环形步道跑步锻炼, 每周两次, 每次跑五圈或六圈, 每周第一次跑五圈和六圈的概率都是 0.5. 若第一次跑了五圈, 则第二次跑五圈和六圈的概率分别为 0.4 和 0.6; 若第一次跑了六圈, 则第二次跑五圈和六圈的概率分别为 0.6 和 0.4. 小颖同学一周共跑十一圈的概率为______; 当小颖同学在一周内跑步不少于十一圈时, 则认为这一周运动量合格. 假设各周之间跑步圈数互不影响, 在 4 周的跑步锻炼中, 以 X 表示小颖同学运动量合格的周数, 则 X 的数学期望为______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. 记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}=$______; 若 $\left|\overrightarrow{AE}\right|=5$, 且 $AE\perp BC$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=$ ______.

15. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$, 且 $(2a+b)x^2+bx-a-1\leqslant 0$ 对任意 $x\in[-2,2]$ 成立, 则 $2a+b$ 的最小值为______.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$, $c-2b=1$, $a=\sqrt{7}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 求 c 的值;

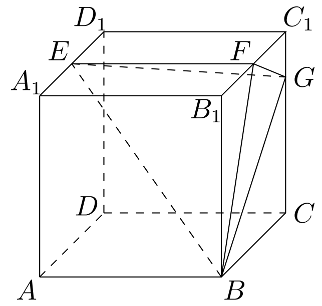
(3) 求 $\sin(A+2B)$ 的值.

17. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, E, F 分别为 A_1D_1 和 B_1C_1 的中点, G 在线段 CC_1 上, 且 $CG=3GC_1$.

(1) 求证: $GF\perp$ 平面 EBF;

(2) 求平面 EBF 和平面 EBG 夹角的余弦值;

(3) 求三棱锥 $D-EBF$ 的体积.



18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左焦点为 F, 右顶点为 A, 点 P 在直线 $x=a$ 上, 直线 FP 的斜率为 $\frac{1}{3}$, $\triangle PFA$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若过 P 的直线与椭圆有唯一公共点 B (B 异于 A), 求证: FP 平分 $\angle AFB$.

19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=2$, $a_2=b_2+1$, $a_3=b_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 给定 $n\in\mathbf{N}^*$, 记集合 $I=\{0,\ 1\}$, 集合 $T_n=\{p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\cdots+p_na_nb_n\mid p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n\in I\}$.

① 求证: 对任意的 $t\in T_n$, 有 $t<a_{n+1}b_{n+1}$;

② 求 T_n 中所有元素之和.

20. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=ax-(\ln x)^2$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3, 且 $x_1<x_2<x_3$,

① 求 a 的取值范围;

② 求证: $(\ln x_2-\ln x_1)\ln x_3<\frac{4\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.